

ICM 122: Álgebra Lineal

Apuntes para Clases

Héctor Olivero Q.

Índice general

1. Matrices y Sistemas de Ecuaciones	1
1.1. Introducción	1
1.2. Operaciones con Matrices	2
1.3. Matrices Particulares	9
1.4. Matriz Traspuesta	11
1.5. Matrices Elementales	13
1.6. Sistemas de Ecuaciones	16
1.7. Matriz Inversa	22
1.8. Determinante de una Matriz	24
1.9. Descomposición <i>LDU</i>	27
1.10. Resumen del capítulo	29
1.11. Ejercicios	33
2. Espacios Vectoriales	37
2.1. Espacios Vectoriales	37
2.2. Subespacio Vectorial	41
2.3. Combinaciones Lineales e Independencia Lineal	44
2.4. Generadores y Bases	50
2.5. Coordenadas	54
2.6. Suma de Subespacios Vectoriales	55
2.7. Transformaciones Lineales	60
2.8. Matriz Representante de una Transformación Lineal	67
2.9. Cambios de Base	70
2.10. Espacio Columna asociado a una matriz	71
2.11. Espacio Fila asociado a una matriz	72
2.12. Relación con sistemas de ecuaciones lineales	73
2.13. Resumen del capítulo	74
2.14. Ejercicios	79
3. Ortogonalidad y Geometría en $\mathbb{R}^n$	83
3.1. Conjuntos ortogonales y ortonormales	83
3.2. Método de Gram-Schmidt	87
3.3. Resumen del capítulo	90
3.4. Ejercicios	91

4. Valores y Vectores Propios	93
4.1. Matrices diagonalizables	93
4.2. Diagonalización de una Matriz Simétrica	102
4.3. Resumen del capítulo	106
4.4. Ejercicios	108
Apéndices	111
Apéndice A. Conjuntos y Funciones	113
A.1. Operaciones con Conjuntos	115
A.2. Funciones	119
A.3. Ejercicios propuestos	126
Apéndice B. Estructuras Algebraicas	127
B.1. Ejercicios Propuestos	132

Capítulo 1

Matrices y Sistemas de Ecuaciones

1.1. Introducción

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una matriz de orden $m \times n$ a coeficientes en $\mathbb{K}$ es una tabla (o arreglo) rectangular de elementos de $\mathbb{K}$ con m filas y n columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Al elemento ubicado en la fila i y en la columna j lo denotaremos $A_{i,j}$, mientras que la i -ésima fila de A la notaremos $A_{i,\bullet}$ y la j -ésima columna la notaremos por $A_{\bullet,j}$. Por ejemplo:

$$A_{1,2} = 4, \quad A_{\bullet,3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,\bullet} = (2 \quad 3 \quad 8)$$

En el caso en que $m = n$, decimos que la matriz es cuadrada.

Al conjunto de todas las matrices en $\mathbb{K}$ de orden $m \times n$ lo denotamos $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, mientras que al conjunto de matrices cuadradas de orden n a coeficientes en $\mathbb{K}$ lo denotamos $M_n(\mathbb{K})$.

Observación 1.

- A las matrices de orden $1 \times n$ las llamaremos vectores fila, mientras que a las matrices de orden $m \times 1$ los llamaremos vectores columna. En particular, $A_{i,\bullet}$ es un vector fila, mientras que $A_{\bullet,j}$ es un vector columna.
- Dado un vector columna a notaremos sus componentes como $a_i, i = 1, \dots, n$.
- Al conjunto de todos los vectores columna de tamaño n con componentes en el cuerpo $\mathbb{K}$, lo denotaremos $\mathbb{K}^n$.
- Salvo que se indique lo contrario, por vector se entenderá vector columna.

Definición 1. Dadas $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$, diremos que $A = B$ si y sólo si:

1. $m = p$ y $n = q$.
2. Para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1, \dots, n$, $A_{i,j} = B_{i,j}$.

1.2. Operaciones con Matrices

Definición 2 (Trasposición de Vectores). *Dado un vector columna (respectivamente fila) v , llamaremos vector traspuesto, lo que denotaremos por v^t al vector fila (respectivamente columna) que se forma al poner v de forma horizontal (respectivamente vertical). Formalmente, $(v^t)_{1,i} = v_{i,1}$. (respectivamente $(v^t)_{i,1} = v_{1,i}$.*

Ejemplo I.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}^t = (1 \ 1 \ 2 \ 4), \quad (1 \ 0 \ 1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 3 (Suma de matrices). *Dadas dos matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, definimos la matriz $A + B$ como:*

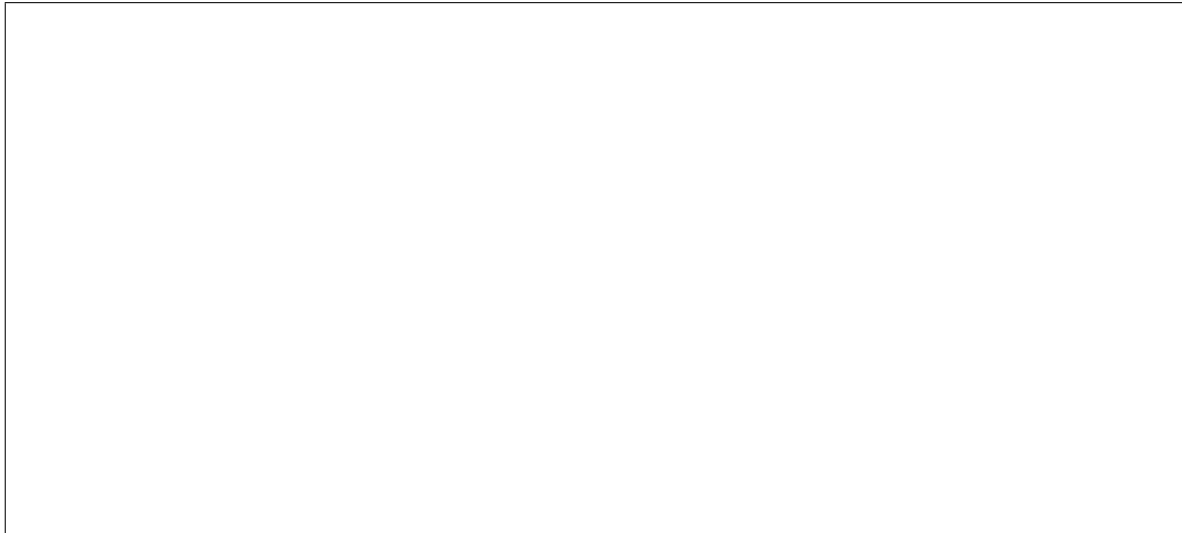
$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, \quad (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j},$$

es decir la suma de matrices se define componente a componente.

Ejemplo II.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 4. $(M_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano, cuyo elemento neutro está dado por la matriz $\mathbb{0}_{m,n}$, es decir una matriz con todas sus entradas iguales a 0.



Definición 5 (Multiplicación de un escalar y una matriz). *Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{K}$ definimos la multiplicación por escalar de k por A , como la matriz kA dada por:*

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, \quad (kA)_{i,j} = kA_{i,j}.$$

Ejemplo III.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 18 \\ 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 6 (Producto interno de vectores). *Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{K}^n$ definimos el producto punto entre ellos por:*

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

También denotaremos $a \cdot b$ por $\langle a, b \rangle$.

Ejemplo IV.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 40 = 300.$$

Definición 7 (Producto de Matrices). *Dadas dos matrices $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times q}(\mathbb{K})$, definimos la matriz producto $AB \in M_{m \times q}(\mathbb{K})$ como:*

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, q, (AB)_{i,j} = A_{i,\bullet} \cdot B_{\bullet,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j},$$

En palabras, el elemento i, j de la matriz producto corresponde al producto punto entre la i -ésima fila de A y la j -ésima columna de B .

Ejemplo V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1) \\ (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observación II. La multiplicación de matrices no está definida para matrices del mismo tamaño, salvo que sean cuadradas. Así también, puede pasar que AB esté definida, pero no BA , con lo cual es claro que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Ejercicio I. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique cuales productos son posibles y calcúelos.

Solución:

Definición 8 (Vector canónico). Dado $n \geq 1$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, llamaremos i -ésimo vector canónico de tamaño n , que notaremos por e_i^n , al vector dado por

$$(e_i^n)_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Ejemplo VI.

$$e_2^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 9. Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ se cumple que:

$$(e_i^m)^t \cdot A = A_{i, \bullet} \quad \wedge \quad A \cdot e_j^n = A_{\bullet, j}.$$

Demostración:

Proposición 10. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea la matriz $\mathbb{I}_n$ como la matriz que tiene por columnas a los vectores e_i^n . Entonces:

1. $\mathbb{I}_n$ es diagonal, y los elementos de la diagonal son iguales a 1.
2. Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, se cumple que

$$\mathbb{I}_m A = A \mathbb{I}_n = A.$$

Demostración:

Definición 11 (Matriz inversa). Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, diremos que

1. A tiene una inversa por la izquierda si existe una matriz $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $BA = \mathbb{I}_n$.
2. A tiene una inversa por la derecha si existe una matriz $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB = \mathbb{I}_m$.
3. Si $m = n$, A tiene una inversa si existe una matriz $B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = \mathbb{I}_n$.

Ejercicio II. Muestre que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es su propia inversa.

Solución:

Ejercicio III. Muestre que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

es la inversa por la izquierda de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

1.2. OPERACIONES CON MATRICES

Observación III.

1. A las matrices invertibles las llamaremos regulares, mientras que a aquellas que no tienen inversa las llamaremos singulares.
2. Más tarde veremos que $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo, y por lo tanto, si $A \in M_n(\mathbb{K})$ tiene inversa multiplicativa, dicha inversa es única. A la inversa de A la denotaremos A^{-1} .
3. Veremos más adelante que toda inversa por la izquierda es automáticamente inversa por la derecha.

Ejercicio IV. *Muestre:*

1. $A \in M_n(\mathbb{K})$ regular implica A^{-1} regular.
2. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ regulares implica AB regular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solución:

Proposición 12. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

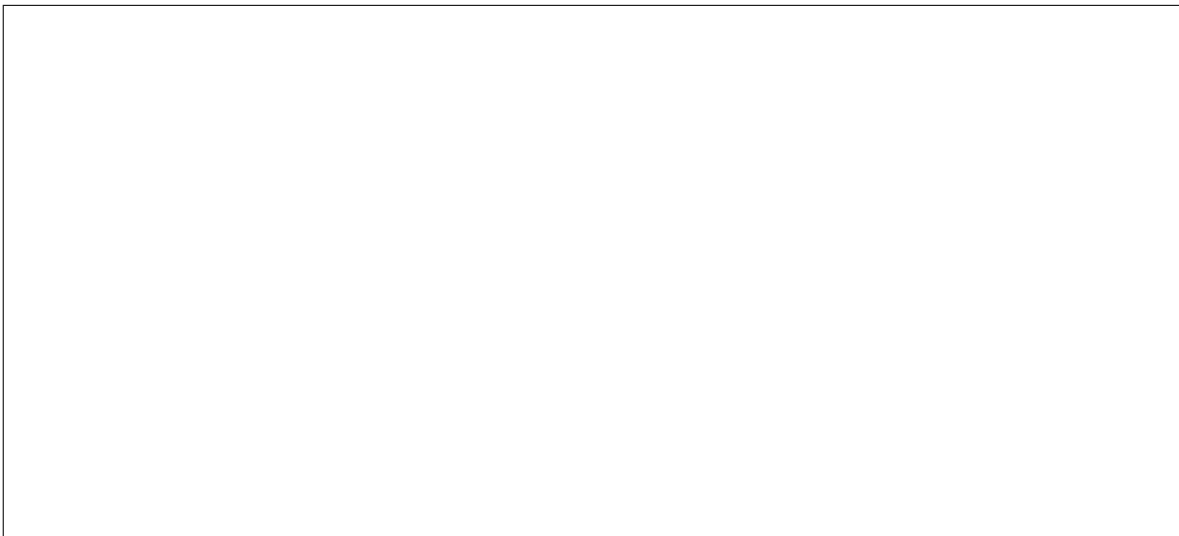
1. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{K}), C \in M_{p \times q}(\mathbb{K}): A(BC) = (AB)C.$
2. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{K}): A(B + C) = AB + AC.$
3. $\forall A \in M_{p \times q}(\mathbb{K}), B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{K}): (B + C)A = BA + CA.$

Demostración:



Proposición 13. $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo con unidad. ($\mathbb{I}_n$ es el neutro para $\cdot$).

Demostración:



1.2. OPERACIONES CON MATRICES

Definición 14. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos las potencias de A de forma inductiva como:

$$A^0 = \mathbb{I}_n, \quad A^{k+1} = A^k A.$$

Ejercicio V. Calcular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3.$$

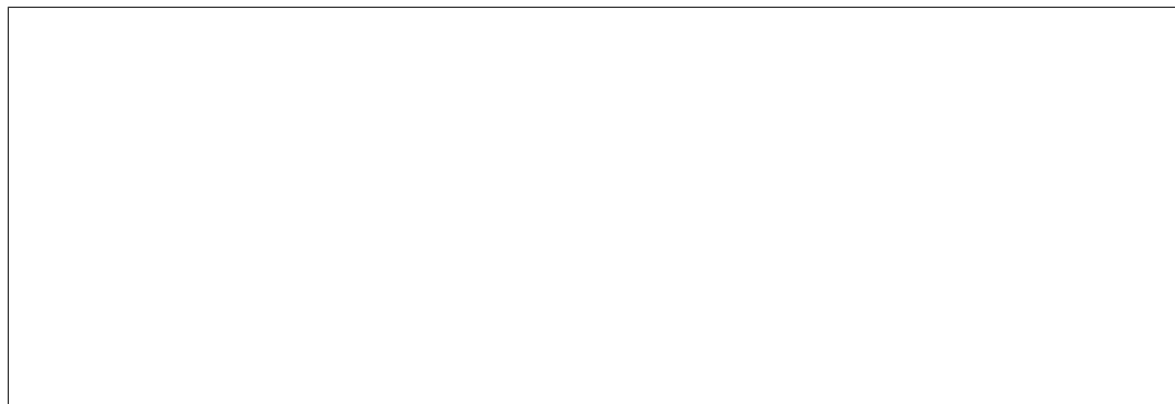
Solución:

Ejercicio VI. Probar que si A y B conmutan, entonces para todo $k \geq 1$, A y B^k también conmutan. Concluya $(AB)^k = A^k B^k$.

Solución:

Proposición 15. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es regular, A^k es regular para todo k y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Demostración:



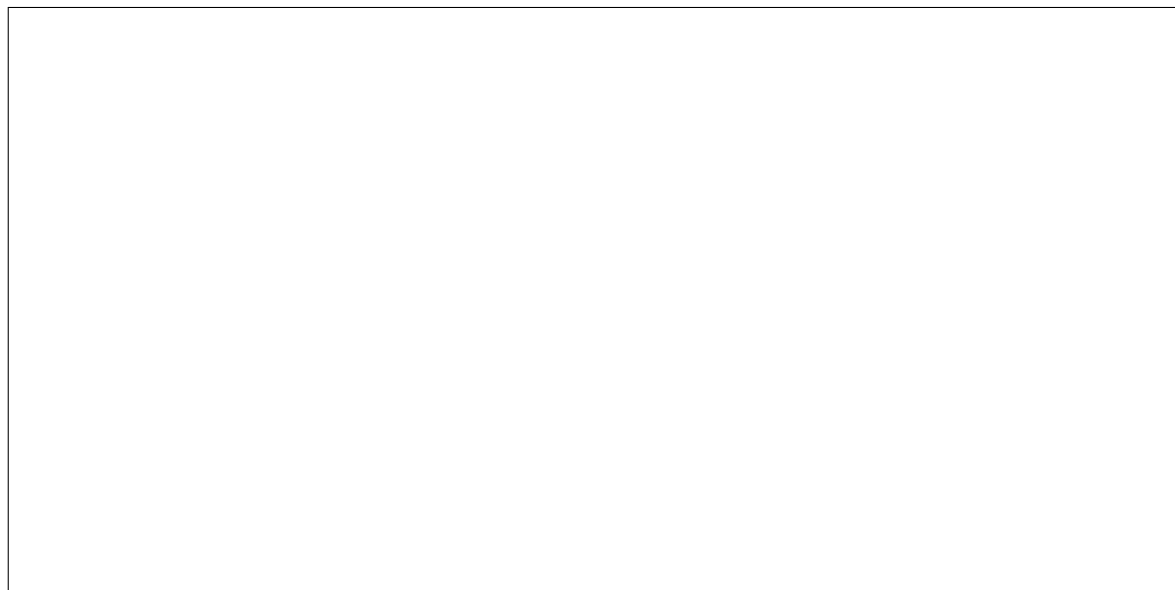
1.3. Matrices Particulares

Definición 16. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Diremos que:

1. A es diagonal, si $\forall i \neq j : A_{i,j} = 0$.
2. A es triangular superior, si $\forall i > j : A_{i,j} = 0$.
3. A es triangular inferior, si $\forall i < j : A_{i,j} = 0$.

Ejercicio VII. De dos ejemplos de cada tipo de matriz de las introducidas en la definición anterior.

Solución:



Ejercicio VIII. Clasifique las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3. MATRICES PARTICULARES

Solución:

Observación IV. Dado $a \in \mathbb{K}^n$, denotaremos por $D(a)$ la matriz diagonal cuyo elemento de la posición (i, i) está dado por a_i .

Proposición 17. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, entonces:

1. Si A y B son triangulares superiores (respectivamente inferiores, diagonales) entonces $A + B$ y AB son triangulares superiores (respectivamente inferiores, diagonales).
2. Si A es diagonal, entonces A^k es diagonal para todo k y $(A^k)_{i,i} = (A_{i,i})^k$.
3. Si A es diagonal y $\forall i = 1, \dots, n$, $A_{i,i} \neq 0$ entonces A es regular, A^{-1} es diagonal, regular y $(A^{-1})_{i,i} = 1/A_{i,i}$.

Demostración:

Ejercicio IX (Importante). Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, y $D_1 \in M_m(\mathbb{K})$, $D_2 \in M_n(\mathbb{K})$ matrices diagonales. Calcule $D_1 A$ y $A D_2$.

1.4. MATRIZ TRASPUESTA

Solución:

1.4. Matriz Traspuesta

Definición 18. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ definimos su traspuesta $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ dada por $A^t_{i,j} = A_{j,i}$.

Ejercicio X. Calcule la traspuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Definición 19. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Si $A^t = A$ diremos que A es simétrica. Si $A^t = -A$ diremos que A es antisimétrica.

1.4. MATRIZ TRASPUESTA

Ejercicio XI. *Muestre que:*

1. Si A es antisimétrica, los elementos de su diagonal son iguales a cero.
2. Si A es simétrica y antisimétrica, entonces $A = \mathbb{0}_{n \times n}$.

Solución:

Proposición 20. Sean $A, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{K}$. Entonces:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(kA)^t = kA^t$.
3. $(A + C)^t = A^t + C^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.
5. Si A es regular, entonces A^t es regular y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración:

1.5. Matrices Elementales

Definición 21. Llamaremos *matriz de permutación*, que denotaremos $I_{i,j}^n \in M_n(\mathbb{K})$, a la matriz que se construye a partir de la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ permutando la fila i con la fila j .

Ejercicio XII. Construir $I_{1,3}^4$, $I_{1,2}^3$ y $I_{1,4}^5$.

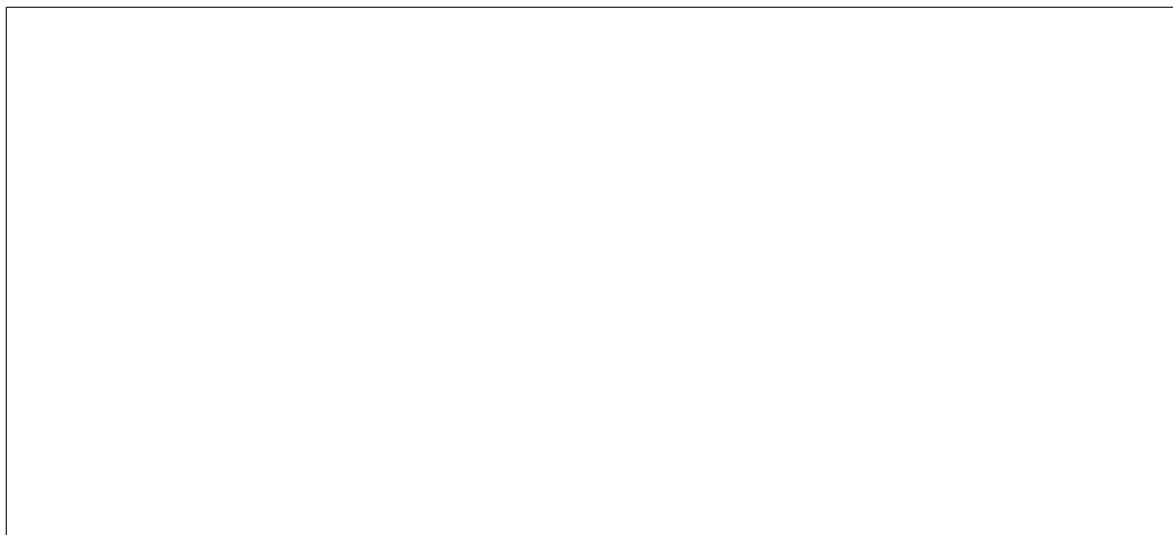
Solución:

Proposición 22. La matriz $I_{i,j}^n$ es regular y $(I_{i,j}^n)^{-1} = I_{i,j}^n$.

Demostración:

Proposición 23. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces $I_{i,j}^m A$ corresponde a la matriz A con sus filas i y j permutadas. Mientras que $A I_{i,j}^n$ corresponde a la matriz A con sus columnas i y j permutadas.

Demostración:



Definición 24. Sean $i \neq j$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Llamaremos *matriz elemental*, que denotaremos $E_{i,j}^n(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$, a la matriz que se construye a partir de la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ sumando a la fila j la fila i multiplicada por λ .

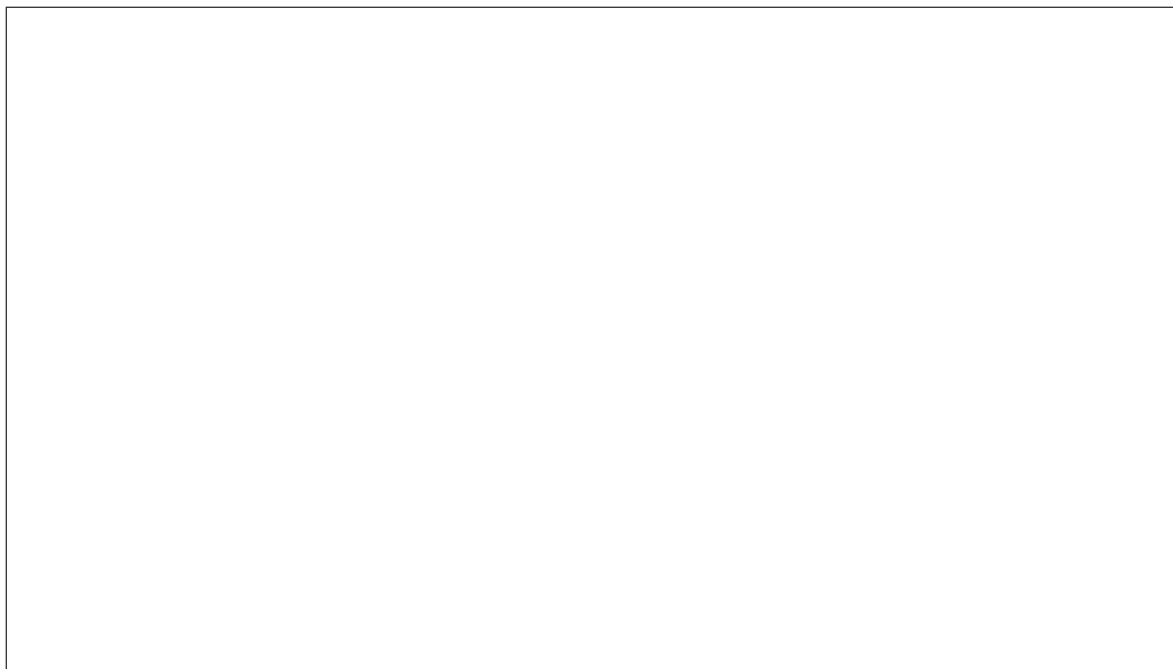
Ejercicio XIII. Construir $E_{1,3}^4(3)$, $E_{1,2}^3(5)$ y $E_{1,4}^5(\lambda)$.

Solución:



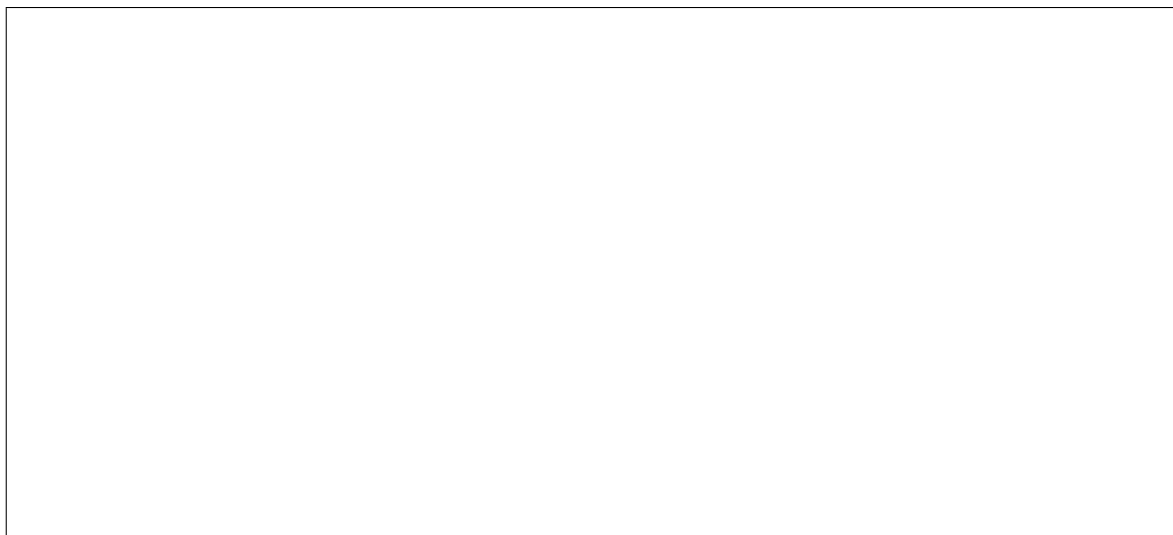
Proposición 25. La matriz $E_{i,j}^n(\lambda)$ es regular y $(E_{i,j}^n(\lambda))^{-1} = E_{i,j}^n(-\lambda)$.

Demostración:



Proposición 26. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces $E_{i,j}^m(\lambda)A$ corresponde a la matriz A salvo en en su fila j , en la que aparece $\lambda A_{i,\bullet} + A_{j,\bullet}$.

Demostración:



Corolario 27. El producto de matrices elementales es regular.

Demostración:



1.6. Sistemas de Ecuaciones

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - y + z &= 1 \\ 2x + z &= 1 \\ -x + y &= 1.\end{aligned}$$

Después de una inspección atenta, se puede notar que sumando la primera y la tercera ecuación es posible obtener el valor de z , el que luego se reemplaza en la segunda para obtener el valor de x , con el que finalmente se obtiene el valor de y a partir de la tercera ecuación. ¿Cuáles son estos valores? ¿Se puede seguir la misma estrategia con el sistema siguiente?

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 1.\end{aligned}$$

Note que el sistema anterior se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si llamamos A a la matriz en el lado izquierdo, y b al vector que aparece en el lado derecho y X al vector (x, y, z) traspuesto, podemos decir que queremos resolver

$$AX = b.$$

Notemos que si A fuera invertible, y conociéramos su inversa, entonces podríamos multiplicar esta última ecuación por la izquierda por A^{-1} y así obtener que la solución del sistema está dada por

$$X = A^{-1}b.$$

¿Pero cómo saber si A es regular? En tal caso ¿Cómo encontrar A^{-1} ? ¿Qué sucede si A no es cuadrada?

Definición 28 (Sistema de Ecuaciones). Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $\{a_{ij} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{K}$, $\{b_j : j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{K}$. Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas corresponde al conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n,\end{aligned}$$

a los elementos a_{ij} se les llama coeficientes y a b_j lado derecho. Si $b = 0$, diremos que el sistema de ecuaciones es homogéneo, en caso contrario se dirá no homogéneo.

1.6. SISTEMAS DE ECUACIONES

Notemos que definiendo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ por $A_{ij} = a_{ij}$, $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ y $b = (b_1, \dots, b_n)^t$ podemos reescribir el sistema de ecuaciones como

$$Ax = b.$$

Volvamos a nuestro ejemplo original, pero escrito matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para resolverlo, lo que hicimos fue sumar la primera ecuación a la tercera. Como vimos la clase anterior, si queremos sumar una fila de una matriz a otra, sólo necesitamos multiplicar por la matriz $E_{ij}(\lambda)$ adecuada. En este caso multiplicando a ambos lados de la ecuación por la matriz $E_{13}(1)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que los ceros que aparecen en las posiciones $(3,1)$ y $(3,2)$ de la matriz de coeficientes, implican que en la última ecuación la variable z está despejada. Intentemos hacer el mismo procedimiento (conseguir ceros) en el segundo ejemplo.

Para aligerar la notación introducimos la **matriz aumentada** $(A|b)$ de modo que multiplicar por una matriz a ambos lados de la ecuación matricial es equivalente a multiplicar la matriz aumentada. En el segundo ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Multipliquemos esta matriz aumentada por la matriz $E_{1,3}(1)$, con ello obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Ahora nos gustaría eliminar el 2 que aparece en la segunda posición de la tercera fila, para de ese modo tener la tercera variable completamente despejada en la tercera ecuación. Un intento un tanto inocente sería multiplicar la matriz aumentada por la matriz $E_{1,3}(-2)$, pero si lo hacemos, si bien vamos a obtener un 0 en la segunda componente de la tercera fila, también va a aparecer un -2 en la primera componente de dicha fila. ¿Cómo continuamos entonces?

Multipliquemos la matriz aumentada obtenida en el paso anterior por la matriz $E_{1,2}(-2)$, obtendremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right),$$

1.6. SISTEMAS DE ECUACIONES

y si esta matriz la pre-multiplicamos por $E_{2,3}(2)$ obtendremos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Notemos que ahora la tercera variable está completamente despejada en la tercera ecuación, de hecho $z = 0$. Reemplazando este valor en la segunda ecuación se puede obtener el valor de y y luego reemplazando ambos valores en la primera ecuación se puede obtener el valor de x .

Observación V. Notemos que esta estrategia (producir ceros hasta poder despejar) no depende de que la matriz de coeficiente sea cuadrada o que tenga un tamaño determinado. Sin embargo ¿Qué nos asegura que la solución obtenida a partir de la matriz aumentada de la última etapa, es una solución del problema original?

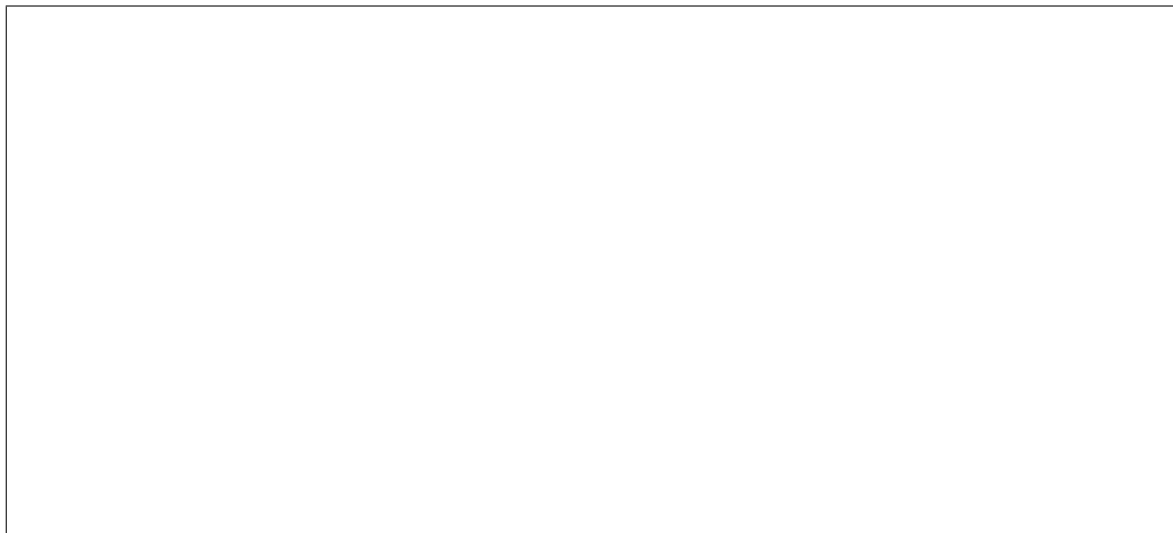
Proposición 29. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ y $C \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ regular. Entonces $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ es solución del sistema matricial

$$Ax = b,$$

si y sólo si x es solución del sistema

$$CAx = Cb.$$

Demostración:



Observación VI. Recordemos que las matrices $I_{i,j}^n$ y $E_{i,j}(\lambda)$ son invertibles (y por lo tanto su producto también), de modo que efectivamente las soluciones encontradas en la matriz final, son soluciones para la matriz original.

Ejercicio XIV. Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\
 -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\
 x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\
 -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= -1 \\
 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Solución:

Definición 30 (Escalonamiento). Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamaremos matriz escalonada asociada a A , que denotaremos $\tilde{A}$, al resultado de multiplicar A por una secuencia de matrices I_{ij} y $E_{ij}(\lambda)$ de tal modo que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,i_2-1} & \tilde{a}_{1,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,i_s} & \dots & \tilde{a}_{s,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donde los elementos $\tilde{a}_{s,i_s} \neq 0$ se denominan **pivotes**, y el número de columnas que son iguales a cero bajo filas sucesivas los llamaremos **peldaños**. Por ejemplo en la segunda fila hay un peldaño de tamaño $i_2 - 1$. Si la última fila de $\tilde{A}$ no tiene todas sus componentes iguales a 0, el tamaño del último peldaño será $n - i_m$, que corresponde a la cantidad de elementos en la última fila de la última fila de $\tilde{A}$ que son distintos de 0.

Definición 31 (SL compatible). Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. Dado el sistema $Ax = b$, diremos que el sistema es compatible, si al pivotar la matriz aumentada $(A|b)$ obtenemos

1.6. SISTEMAS DE ECUACIONES

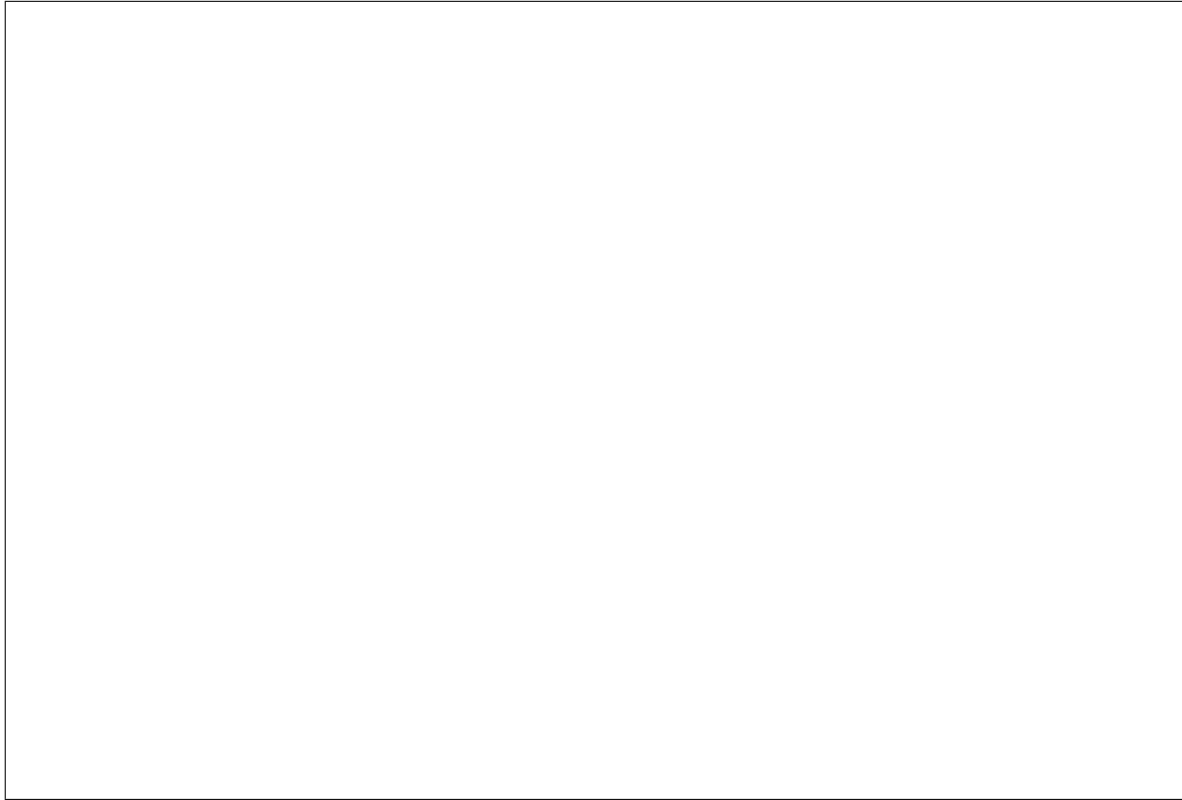
$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,i_2-1} & \tilde{a}_{1,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,i_s} & \dots & \tilde{a}_{s,n} & \tilde{b}_s \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix},$$

con $\tilde{b}_{s+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$. Si para algún $i \geq s+1$, $\tilde{b}_i \neq 0$ diremos que el sistema es incompatible.

Proposición 32. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. Supongamos que el sistema $Ax = b$ es compatible. Sea $(\tilde{A}|\tilde{b})$ una matriz escalonada asociada a la matriz aumentada $(A|b)$. Entonces:

1. Si $(\tilde{A}|\tilde{b})$ tiene todos sus peldaños de tamaño 1, entonces el sistema tiene una única solución.
2. Si alguno de los peldaños de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ tiene largo mayor a 1, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

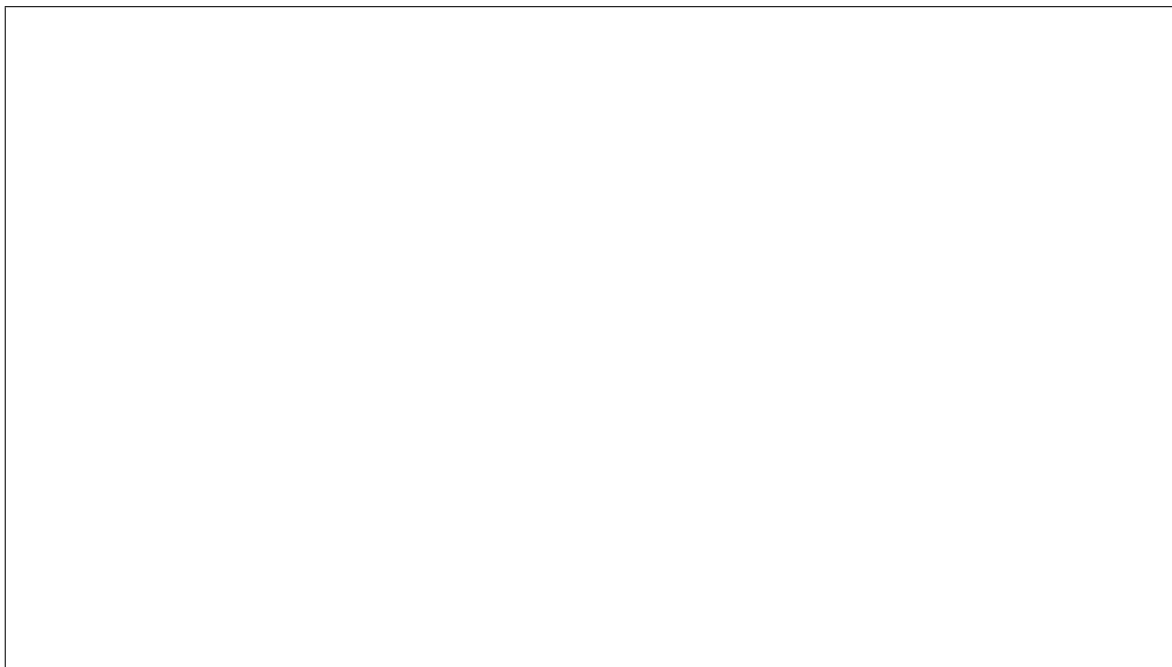
Demostración:



Teorema 33. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, y sea $\tilde{A}$ una matriz escalonada asociada. Son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene una única solución.
3. Los elementos de la diagonal de $\tilde{A}$ son todos distintos de cero.

Demostración:

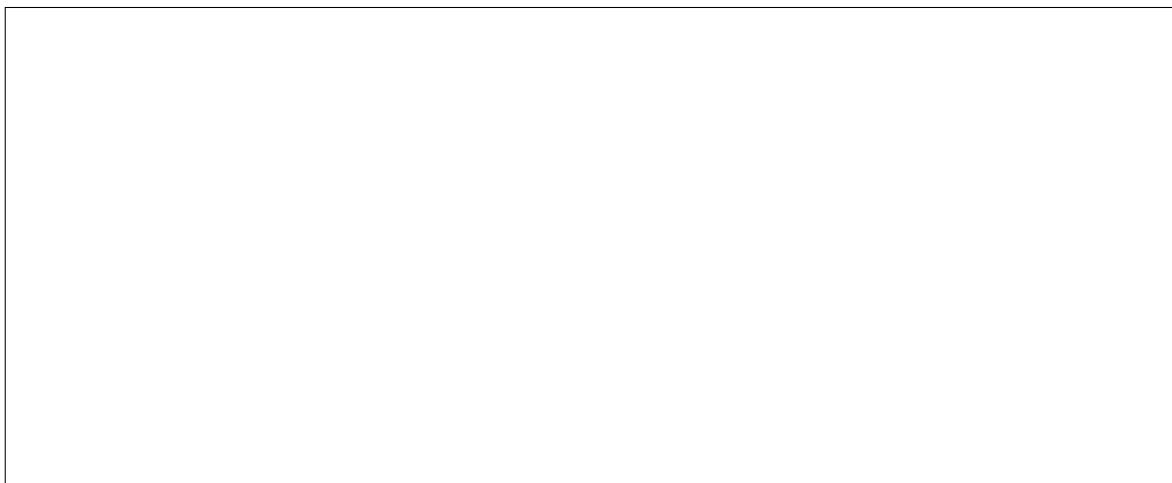


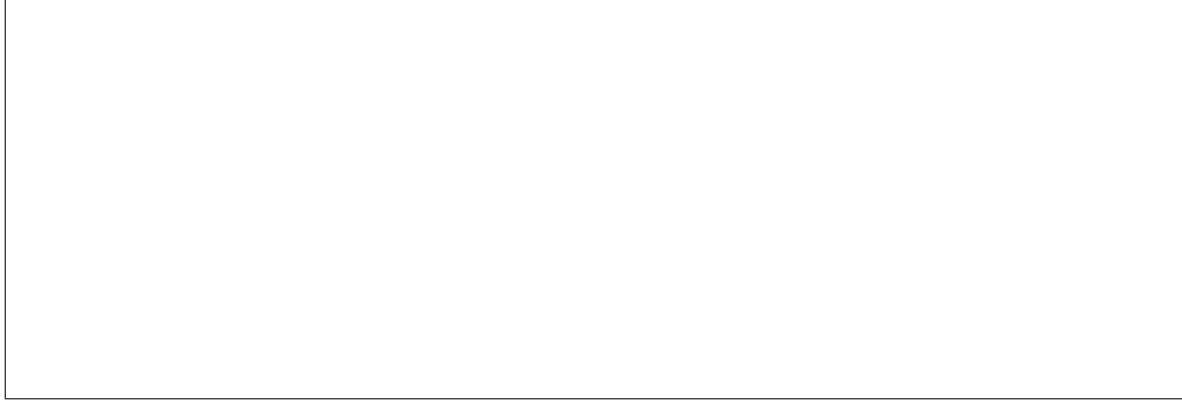
Observación VII. Note que entonces una matriz triangular superior o inferior será invertible si y sólo si, los elementos de su diagonal son distintos de cero.

Proposición 34. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si $BA = \mathbb{I}_n$, entonces son equivalentes:

1. $(\forall b \in \mathbb{K}^n), Ax = b$ tiene solución.
2. $Ax = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Demostración:





Corolario 35. Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son tales que $BA = \mathbb{I}_n$, entonces $AB = \mathbb{I}_n$. Es decir, si B es la inversa por la izquierda de A , también es su inversa por la derecha.

Demostración:



1.7. Matriz Inversa

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones cuadrado cuya matriz de coeficientes es invertible. Después de pivotar, su matriz aumentada quedaría

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,s} & \dots & \tilde{a}_{s,n} & \tilde{b}_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \tilde{a}_{n,n} & \tilde{b}_n \end{array} \right),$$

si bien en este punto podemos resolver el sistema vía sustitución, también podríamos seguir pre-multiplicando por matrices $E_{p,q}(\lambda)$, pero esta vez para eliminar los términos sobre la diagonal, es decir considerando $p > q$. Si procedemos de esta forma, obtendremos un nuevo sistema equivalente

con la forma

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{1,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,s} & 0 & \dots & \tilde{b}_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \tilde{a}_{n,n} & \tilde{b}_n \end{array} \right).$$

Notemos que esta última matriz aumentada corresponde al sistema de ecuaciones:

$$\tilde{a}_{i,i}x_i = \tilde{b}_i,$$

cuya solución es evidentemente

$$x_i = \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{i,i}}.$$

Notemos que si multiplicamos la matriz aumentada, por una matriz diagonal cuyo i -ésimo elemento corresponde a $1/\tilde{a}_{i,i}$ obtenemos un nuevo sistema equivalente dado por

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \tilde{b}_1/\tilde{a}_{1,1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde{b}_2/\tilde{a}_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \tilde{b}_s/\tilde{a}_{s,s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 1 & \tilde{b}_n/\tilde{a}_{n,n} \end{array} \right).$$

Notemos que en el lado derecho nos quedó justamente la solución del sistema original $Ax = b$. Utilizaremos el procedimiento anterior para construir la matriz inversa de A .

Comencemos por notar que si X es la inversa de A , entonces

$$AX = I_n.$$

Si llamamos e_j a la j -ésima columna de I_n , y x_j a la j -ésima columna de X , es directo que la ecuación $AX = I_n$ es equivalente a n sistemas de ecuaciones

$$Ax_j = e_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

así las columnas de X , la inversa de A , son simplemente los vectores x_j soluciones de los sistemas (1.1). Dado que en el proceso de pivoteo el lado derecho no juega ningún rol, es posible resolver los n sistemas de ecuaciones al mismo tiempo y obtener inmediatamente la inversa de A pivoteando la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} a_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n,n} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & 1 \end{array} \right).$$

1.8. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Ejercicio XV. Encuentre la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

1.8. Determinante de una Matriz

Definición 36. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos su determinante, el cual notamos por $|A|$ inductivamente:

- Si $n = 1$, $A = (a)$, y entonces $|A| = a$.
- Si $n > 1$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{j1} |A_{j1}|,$$

donde A_{1j} es la submatriz que se forma a partir de A eliminando la fila 1 y la columna j , y A_{j1} es la submatriz que se forma a partir de A eliminando la fila j y la columna 1.

1.8. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Ejercicio XVI. *Calcular el determinante de*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

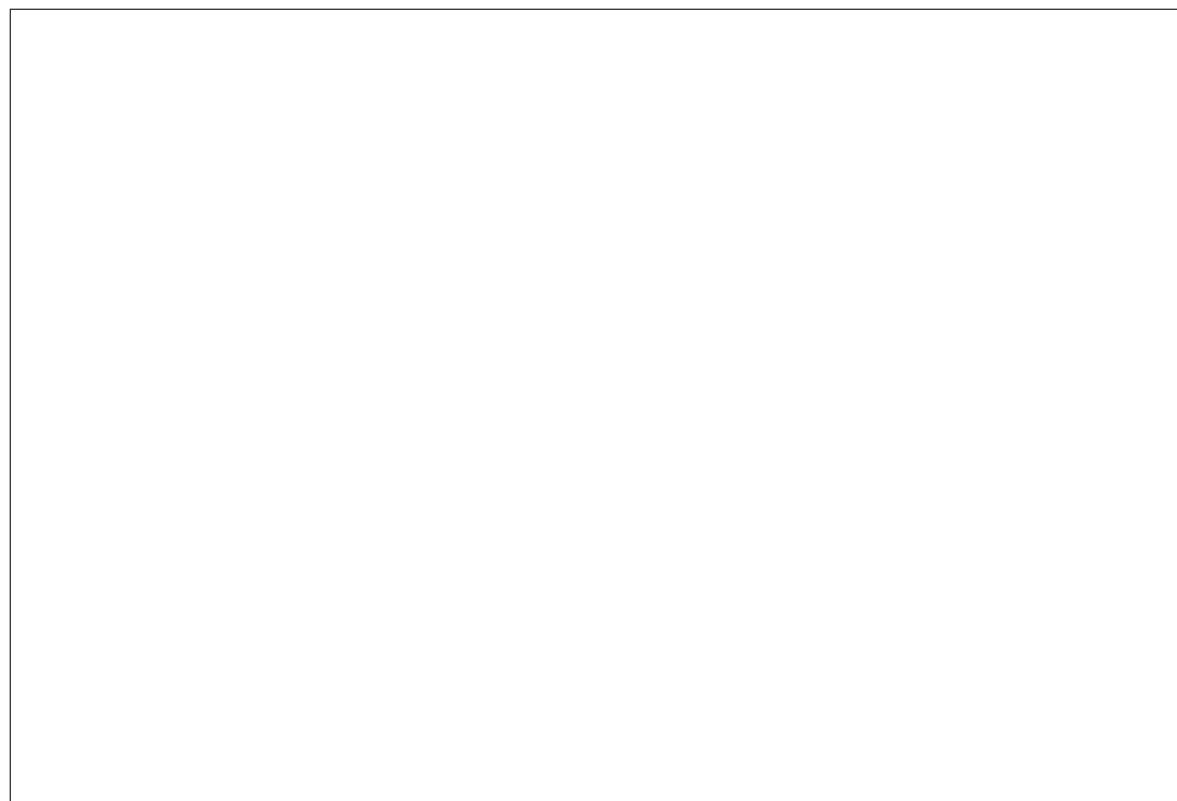
Solución:

Proposición 37. *Si A es una matriz triangular superior, entonces su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal.*

Demostración:

Proposición 38. *Si A es una matriz triangular superior por bloques, entonces su determinante es igual al producto de los determinantes de los bloques que forman su diagonal.*

Demostración:



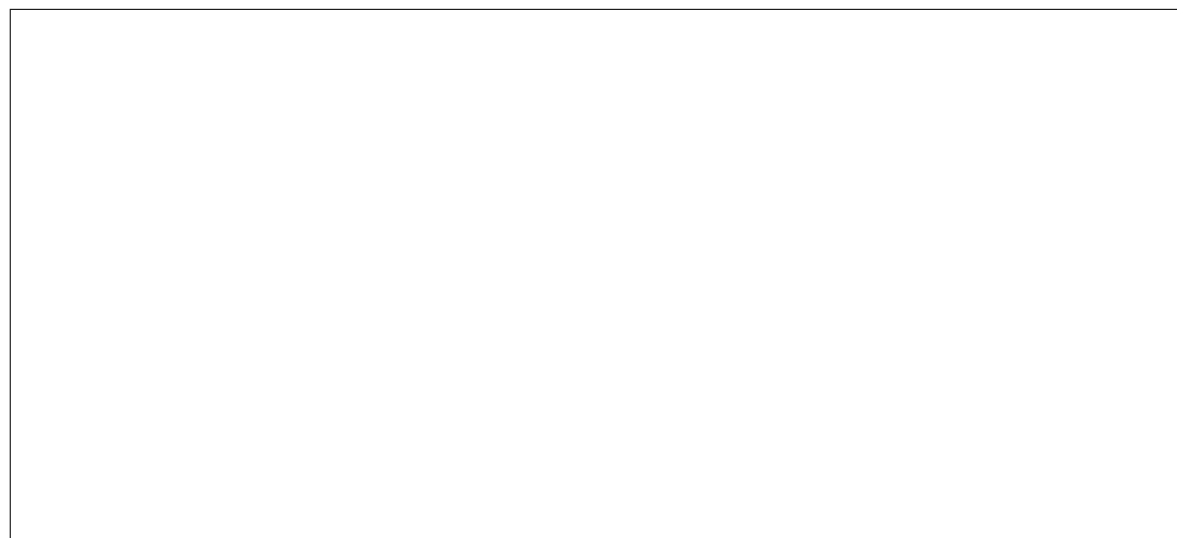
Seguimos esta sección con el enunciado de un Teorema que aceptaremos sin demostración:

Teorema 39. Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$|AB| = |A||B|.$$

Corolario 40. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ es regular si y sólo si $|A| \neq 0$.

Demostración:



1.9. Descomposición LDU

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Suponga que al pivotear A para llevarla a su forma escalonada no se permutaron filas, es decir, no encontramos pivotes nulos. Entonces

$$\left(\prod_j E_{p_j, q_j}(\lambda_j) \right) A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

Llamemos L a la inversa de la matriz que multiplica a A en la última ecuación. Entonces

$$A = L \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix},$$

pero como

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{2,2} & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{2,n}/\tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n}/\tilde{a}_{1,1} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{a}_{n,n}/\tilde{a}_{n,n} \end{pmatrix},$$

llamando D y U respectivamente a las matrices a la derecha en la última ecuación, concluimos que

$$A = LDU.$$

Ejercicio XVII. *Justifique cada paso del último desarrollo.*

Solución:

Ejercicio XVIII. *Calcule la descomposición LDU de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.9. DESCOMPOSICIÓN LDU

Solución:

1.10. Resumen del capítulo

Matrices

Definición 1. Dadas $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$, diremos que $A = B$ si y sólo si:

1. $m = p$ y $n = q$.
2. Para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1, \dots, n$, $A_{i,j} = B_{i,j}$.

Definición 2 (Trasposición de Vectores). Dado un vector columna (respectivamente fila) v , llamaremos vector traspuesto, lo que denotaremos por v^t al vector fila (respectivamente columna) que se forma al poner v de forma horizontal (respectivamente vertical). Formalmente, $(v^t)_{1,i} = v_{i,1}$. (respectivamente $(v^t)_{i,1} = v_{1,i}$).

Definición 3 (Suma de matrices). Dadas dos matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, definimos la matriz $A + B$ como:

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j},$$

es decir la suma de matrices se define componente a componente.

Proposición 4. $(M_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano, cuyo elemento neutro está dado por la matriz $\mathbb{0}_{m,n}$, es decir una matriz con todas sus entradas iguales a 0.

Definición 5 (Multiplicación de un escalar y una matriz). Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{K}$ definimos la multiplicación por escalar de k por A , como la matriz kA dada por:

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, (kA)_{i,j} = kA_{i,j}.$$

Definición 6 (Producto interno de vectores). Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{K}^n$ definimos el producto punto entre ellos por:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

También denotaremos $a \cdot b$ por $\langle a, b \rangle$.

Definición 7 (Producto de Matrices). Dadas dos matrices $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times q}(\mathbb{K})$, definimos la matriz producto $AB \in M_{m \times q}(\mathbb{K})$ como:

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, q, (AB)_{i,j} = A_{i,\bullet} \cdot B_{\bullet,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j},$$

En palabras, el elemento i, j de la matriz producto corresponde al producto punto entre la i -ésima fila de A y la j -ésima columna de B .

Definición 8 (Vector canónico). Dado $n \geq 1$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, llamaremos i -ésimo vector canónico de tamaño n , que notaremos por e_i^n , al vector dado por

$$(e_i^n)_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Proposición 9. Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ se cumple que:

$$(e_i^m)^t \cdot A = A_{i,\bullet} \quad \wedge \quad A \cdot e_j^n = A_{\bullet,j}.$$

Proposición 10. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea la matriz $\mathbb{I}_n$ como la matriz que tiene por columnas a los vectores e_i^n . Entonces:

1. $\mathbb{I}_n$ es diagonal, y los elementos de la diagonal son iguales a 1.
2. Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, se cumple que

$$\mathbb{I}_m A = A \mathbb{I}_n = A.$$

Definición 11 (Matriz inversa). Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, diremos que

1. A tiene una inversa por la izquierda si existe una matriz $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $BA = \mathbb{I}_n$.
2. A tiene una inversa por la derecha si existe una matriz $B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB = \mathbb{I}_m$.

3. Si $m = n$, A tiene una inversa si existe una matriz $B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = \mathbb{I}_n$.

Proposición 12. Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{K}), C \in M_{p \times q}(\mathbb{K}): A(BC) = (AB)C$.
2. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{K}): A(B + C) = AB + AC$.
3. $\forall A \in M_{p \times q}(\mathbb{K}), B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{K}): (B + C)A = BA + CA$.

Proposición 13. $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo no conmutativo con unidad. $(\mathbb{I}_n$ es el neutro para $\cdot$).

Definición 14. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos las potencias de A de forma inductiva como:

$$A^0 = \mathbb{I}_n, A^{k+1} = A^k A.$$

Proposición 15. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es regular, A^k es regular para todo k y $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Definición 16. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Diremos que:

1. A es diagonal, si $\forall i \neq j : A_{i,j} = 0$.
2. A es triangular superior, si $\forall i > j : A_{i,j} = 0$.
3. A es triangular inferior, si $\forall i < j : A_{i,j} = 0$.

Proposición 17. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, entonces:

1. Si A y B son triangulares superiores (respectivamente inferiores, diagonales) entonces $A + B$ y AB son triangulares superiores (respectivamente inferiores, diagonales).
2. Si A es diagonal, entonces A^k es diagonal para todo k y $(A^k)_{i,i} = (A_{i,i})^k$.

3. Si A es diagonal y $\forall i = 1, \dots, n, A_{i,i} \neq 0$ entonces A es regular, A^{-1} es diagonal, regular y $(A^{-1})_{i,i} = 1/A_{i,i}$.

Definición 18. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ definimos su traspuesta $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ dada por $A_{i,j}^t = A_{j,i}$.

Definición 19. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Si $A^t = A$ diremos que A es simétrica. Si $A^t = -A$ diremos que A es antisimétrica.

Proposición 20. Sean $A, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{K}$. Entonces:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(kA)^t = kA^t$.
3. $(A + C)^t = A^t + C^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.
5. Si A es regular, entonces A^t es regular y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Definición 21. Llamaremos matriz de permutación, que denotaremos $I_{i,j}^n \in M_n(\mathbb{K})$, a la matriz que se construye a partir de la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ permutando la fila i con la fila j .

Proposición 22. La matriz $I_{i,j}^n$ es regular y $(I_{i,j}^n)^{-1} = I_{i,j}^n$.

Proposición 23. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces $I_{i,j}^m A$ corresponde a la matriz A con sus filas i y j permutadas. Mientras que $A I_{i,j}^n$ corresponde a la matriz A con sus columnas i y j permutadas.

Definición 24. Sean $i \neq j$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Llamaremos matriz elemental, que denotaremos $E_{i,j}^n(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$, a la matriz que se construye a partir de la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ sumando a la fila j la fila i multiplicada por λ .

Proposición 25. La matriz $E_{i,j}^n(\lambda)$ es regular y $(E_{i,j}^n(\lambda))^{-1} = E_{i,j}^n(-\lambda)$.

Proposición 26. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces $E_{i,j}^m(\lambda)A$ corresponde a la matriz A salvo en su fila j , en la que aparece $\lambda A_{i,\bullet} + A_{j,\bullet}$.

Corolario 27. *El producto de matrices elementales es regular.*

Proposición 28. *Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ y $C \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$ regular. Entonces $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ es solución del sistema matricial*

$$Ax = b,$$

si y sólo si x es solución del sistema

$$CAx = Cb.$$

Definición 29 (Escalonamiento). *Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamaremos matriz escalonada asociada a A , que denotaremos $\tilde{A}$, al resultado de multiplicar A por una secuencia de matrices I_{ij} y $E_{ij}(\lambda)$ de tal modo que*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,i_2-1} & \tilde{a}_{1,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,i_s} & \dots & \tilde{a}_{s,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

donde los elementos $\tilde{a}_{s,i_s} \neq 0$ se denominan **pivotes**, y el número de columnas que son iguales a cero bajo filas sucesivas los llamaremos **peldaños**. Por ejemplo en la segunda fila hay un peldaño de tamaño $i_2 - 1$. Si la última fila de $\tilde{A}$ no tiene todas sus componentes iguales a 0, el tamaño del último peldaño será $n - i_m$, que corresponde a la cantidad de elementos en la última fila de la última fila de $\tilde{A}$ que son distintos de 0.

Definición 30 (SL compatible). *Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. Dado el sistema $Ax = b$, diremos que el sistema es compatible, si al pivotar la matriz aumentada $(A|b)$ obtenemos*

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,i_2-1} & \tilde{a}_{1,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,i_2} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{s,i_s} & \dots & \tilde{a}_{s,n} & \tilde{b}_s \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{s+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix},$$

con $\tilde{b}_{s+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$. Si para algún $i \geq s + 1$, $\tilde{b}_i \neq 0$ diremos que el sistema es incompatible.

Proposición 31. *Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $b \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$. Supongamos que el sistema $Ax = b$ es compatible. Sea $(\tilde{A}|\tilde{b})$ una matriz escalonada asociada a la matriz aumentada $(A|b)$. Entonces:*

1. *Si $(\tilde{A}|\tilde{b})$ tiene todos sus peldaños de tamaño 1, entonces el sistema tiene una única solución.*
2. *Si alguno de los peldaños de $(\tilde{A}|\tilde{b})$ tiene largo mayor a 1, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

Teorema 32. *Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, y sea $\tilde{A}$ una matriz escalonada asociada. Son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *$\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene una única solución.*
3. *Los elementos de la diagonal de $\tilde{A}$ son todos distintos de cero.*

Proposición 33. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si $BA = \mathbb{I}_n$, entonces son equivalentes:*

1. *$(\forall b \in \mathbb{K}^n)$, $Ax = b$ tiene solución.*
2. *$Ax = 0$ si y sólo si $x = 0$.*

Corolario 34. *Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ son tales que $BA = \mathbb{I}_n$, entonces $AB = \mathbb{I}_n$. Es decir, si B es la inversa por la izquierda de A , también es su inversa por la derecha.*

Definición 35. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, definimos su determinante, el cual notamos por $|A|$ inductivamente:*

- *Si $n = 1$, $A = (a)$, y entonces $|A| = a$.*
- *Si $n > 1$, entonces*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{j1} |A_{j1}|,$$

donde A_{1j} es la submatriz que se forma a partir de A eliminando la fila 1 y la columna j , y A_{j1} es la submatriz que se forma a partir de A eliminando la fila j y la columna 1.

Proposición 36. Si A es una matriz triangular superior, entonces su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Proposición 37. Si A es una matriz triangular superior por bloques, entonces su determinante es igual al producto de los determinantes de los bloques que forman su diagonal.

Teorema 38. Si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, entonces

$$|AB| = |A||B|.$$

Corolario 39. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ es regular si y sólo si $|A| \neq 0$.

1.11. Ejercicios

1. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Demuestre que

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2,$$

si y sólo si A y B conmutan.

2. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Asuma que A, B y $(A + B^{-1})$ son matrices regulares. Muestre que $(A^{-1} + B)$ también es regular y que su inversa está dada por $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

3. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Demuestre que si A y B conmutan, entonces:

a) A^t y B^t conmutan.

b) Si además A es regular entonces A^{-1} y B conmutan.

c) Si además A y B son regulares entonces A^{-1} y B^{-1} conmutan.

4. Sean $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \{1, \dots, n\}$, $p \neq q$. Demuestre que

$$E_{p,q}^n(\lambda)E_{p,q}^n(\mu) = E_{p,q}^n(\lambda + \mu).$$

5. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Demuestre que si A y B son diagonales, entonces conmutan.

b) Demuestre que si A es diagonal con todos los elementos de la diagonal distintos y $AB = BA$, entonces B es diagonal. Indicación pruebe que para todo par k, j : $A_{k,k}B_{k,j} = B_{k,j}A_{j,j}$.

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 3 \\2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -1 \\x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\-2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= -4 \\-2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1\end{aligned}$$

7. Encuentre condiciones sobre α para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ \alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 &= \alpha^2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2\end{aligned}$$

8. Considere la matriz genérica de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sea $\Delta = ad - cd$, demuestre que si $\Delta \neq 0$, entonces A es invertible. En tal caso calcule A^{-1} .

1.11. EJERCICIOS

9. Calcule el determinante y la inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de λ , $(A - \lambda I)$ es regular?

Indicación: Recuerde la relación entre determinante y existencia de inversa.

11. Estudiar en función de α el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= \alpha \\ x + y + \alpha z &= \alpha^2 \end{aligned}$$

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a^n & a^{n-1} & \dots & \dots & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$$

Justifique que A es invertible y calcule su inversa.

13. Sea A una matriz cuadrada tal que A^3 es la matriz nula. Sea R el conjunto que forman todas las matrices de la forma

$$M(\lambda) = I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que R dotado de la multiplicación de matrices es grupo Abeliano. **Indicación:** Demuestre que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$M(\lambda)M(\mu) = M(\lambda + \mu).$$

14. Encuentre la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 11 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.11. EJERCICIOS

15. Sean A y S dos matrices cuadradas, tales que S es simétrica. Demuestre que:
- a) $A^t A$ es simétrica.
 - b) $A^t S A$ es simétrica.
 - c) Si A es antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.
16. Sean A, B matrices cuadradas tales que $A = AB$ y $B = BA$. Muestre que A y B son idempotentes. Es decir $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1. Espacios Vectoriales

Definición 1 (Espacio Vectorial). *Una estructura algebraica $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (e.v.) sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si:*

1. $(V, +)$ es un grupo Abeliano.
2. La (multiplicación por escalar) $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, *satisface*
 - a) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall x, y \in V) : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$
 - b) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall x \in V) : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$
 - c) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall x \in V) : (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$
 - d) Si 1 es el elemento neutro para la multiplicación en $\mathbb{K}$, $(\forall x \in V) : 1 \cdot x = x.$

Ejemplo I. $\mathbb{R}^2$ dotado de su suma usual es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En efecto, sabemos que $(\mathbb{R}^2, +)$ es grupo Abeliano y el resto de las propiedades se verifican fácilmente usando las propiedades de la suma de matrices y de multiplicación de matrices por un escalar. Por ejemplo, para el punto 2.a):

$$\begin{aligned} \alpha \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se ha utilizado la definición de suma de vectores, en la segunda igualdad se ha utilizado la definición de multiplicación de un vector por un escalar, en la tercera igualdad se ha utilizado la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición en $\mathbb{R}$, en la cuarta igualdad se ha vuelto a utilizar la definición de suma de vectores, mientras que en la última igualdad se ha utilizado nuevamente la definición de la multiplicación de un vector por un escalar.

Ejercicio I. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (típicamente, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Muestre que:

2.1. ESPACIOS VECTORIALES

1. $\mathbb{K}^n$ con su suma usual es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.
2. $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ con su suma usual es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Solución:

Ejercicio II. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (típicamente, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Muestre que $\mathbb{K}[x]$, los polinomios a coeficientes en $\mathbb{K}$, con su suma usual es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Solución:

2.1. ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio III. Sea $\ell = \{(x_n)_{n \geq 0} : x_n \in \mathbb{R}\}$ el espacio de todas las sucesiones reales, muestre que dotado de las operaciones:

$$+ : \ell \times \ell \rightarrow \ell$$

$$x + y = (x_n + y_n)_{n \geq 0},$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \ell \rightarrow \ell$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_n)_{n \geq 0},$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Solución:

Ejercicio IV. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (típicamente, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sea A un conjunto cualquiera y $\mathcal{F} := \{f : A \rightarrow \mathbb{K}\}$, el conjunto de todas las funciones definidas en A a valores en $\mathbb{K}$. Muestre que $\mathcal{F}$ dotado de las operaciones:

$$+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

2.1. ESPACIOS VECTORIALES

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

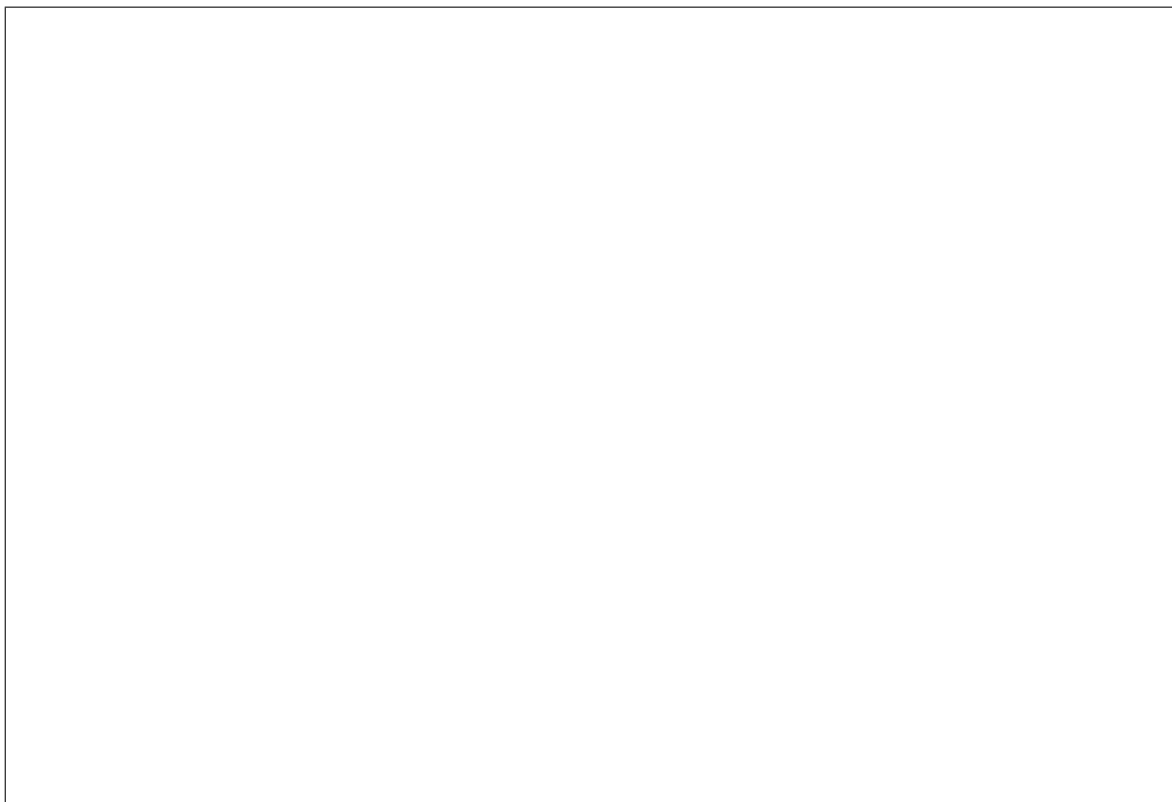
es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Solución:

Teorema 2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se tiene:

1. $(\forall x, y, z \in V) : x + z = y + z \iff x = y.$
2. $(\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\})(\forall x, y \in V) : ax = ay \iff x = y.$
3. Si denotamos por $\vec{0}$ el neutro en $(V, +)$, $(\forall a \in \mathbb{K}) : a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$
4. Si denotamos por 0 el neutro en $(\mathbb{K}, +)$, $(\forall x \in V) : 0 \cdot x = \vec{0}.$
5. $a \cdot x = \vec{0} \iff x = \vec{0} \vee a = 0.$

Demostración:



2.2. Subespacio Vectorial

Definición 3. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. $U \subset V$ se dirá subespacio vectorial (s.e.v.) de V si U es $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con las mismas operaciones que V .

Antes de pasar a los ejemplos, estudiaremos una caracterización de los s.e.v. que nos será muy útil.

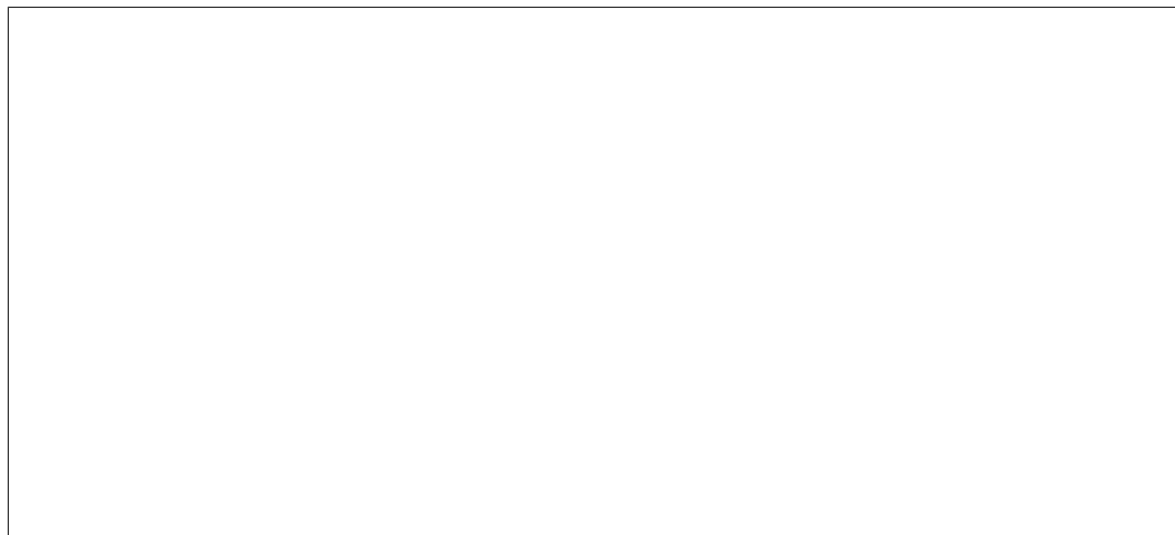
Teorema 4. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$. $U \subset V$ es s.e.v. de V si y sólo si:

1. $\vec{0} \in U$.
2. U es cerrado para la suma vectorial: $(\forall x, y \in U) : x + y \in U$.
3. U es cerrado para la multiplicación por escalar: $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x \in U) : a \cdot x \in U$.

Demostración:

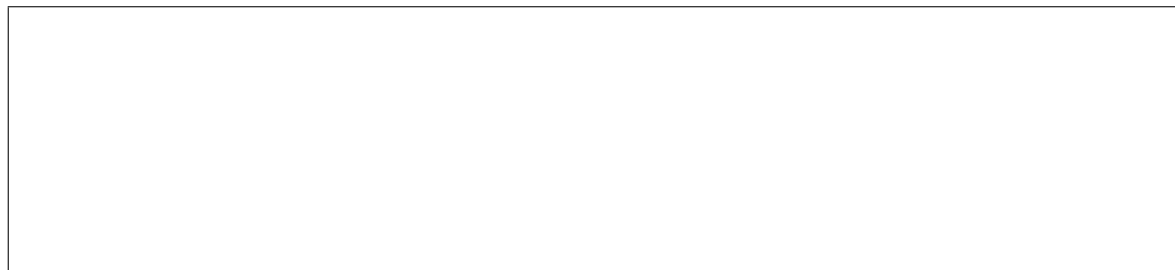


2.2. SUBESPACIO VECTORIAL



Corolario 5. *Todo espacio vectorial tiene al menos un subespacio vectorial: $U = \{\vec{0}\}$.*

Demostración:



Ejemplo II. *Los elementos de $\mathbb{R}^3$ cuya segunda componente es igual a 0 son un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En efecto, llamemos $U = \{(x, y, z)^t : y = 0\}$. Si $(x_1, 0, z_1), (x_2, 0, z_2) \in U$, entonces:*

$$(x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (x_1 + x_2, 0, z_1 + z_2),$$

de donde se sigue que $(x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) \in U$. Por lo tanto, la suma es ley de composición interna en U .

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (x_1, 0, z_1) = (\lambda \cdot x_1, 0, \lambda \cdot z_1),$$

y entonces $\lambda \cdot (x_1, 0, z_1) \in U$.

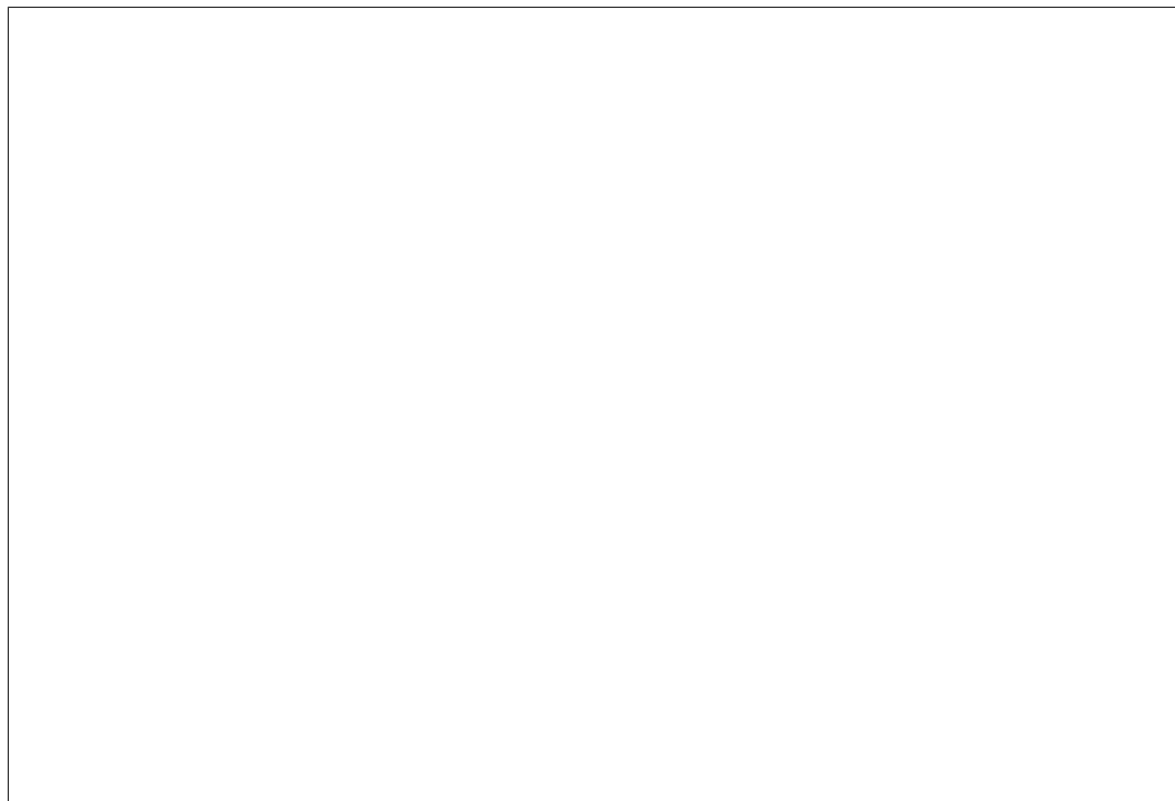
Como es claro que $\vec{0} \in U$ se sigue que $(U, +, \cdot)$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio V. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (típicamente, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).*

1. Las matrices triangulares superiores son un s.e.v. de $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

2. Sea $a \in \mathbb{K}$ y $N_a = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(a) = 0\}$ es un s.e.v. de $\mathbb{K}[x]$.

Solución:

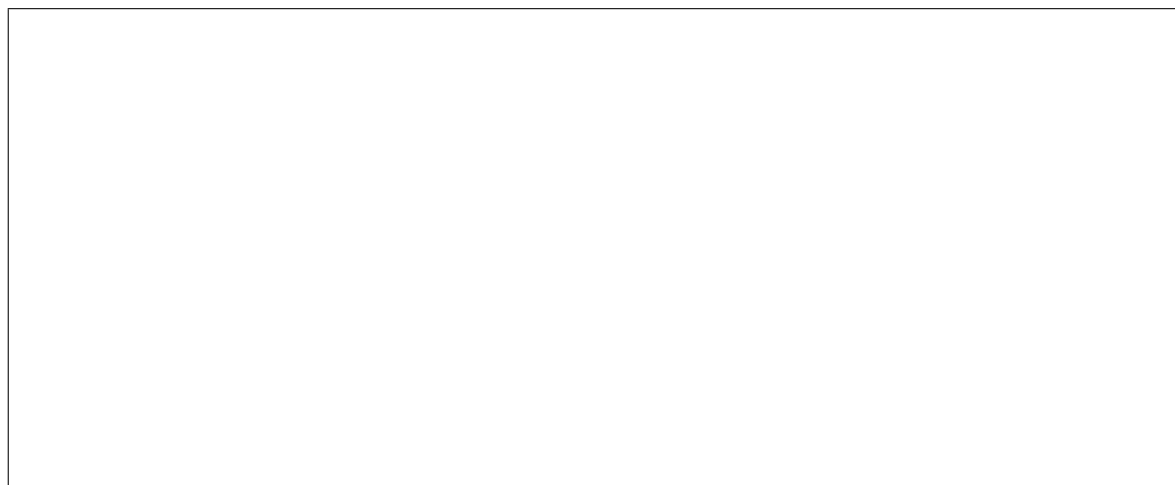


Ejercicio VI. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, llamamos núcleo de A al conjunto:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \vec{0}\}.$$

Muestre que $N(A)$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Solución:



Ejercicio VII. Sea $x = (0, 1)^t \in \mathbb{R}^2$, sea

$$U = \{\lambda \cdot x : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Muestre que U es un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

2.3. Combinaciones Lineales e Independencia Lineal

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 6 (Combinación Lineal). Sean $v, v_1, \dots, v_n \in V$ diremos que v es combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$ si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Ejemplo III. Se tiene que:

1. En $\mathbb{R}^3$, $(3, 0, 2)^t$ es combinación lineal de $(1, 0, 0)^t$ y $(0, 0, 1)^t$, pues

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. En $M_{2,2}(\mathbb{R})$, la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

es combinación lineal de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL

3. En $\mathbb{R}[x]$, el vector $x^2 + 2x - 4x^4$ es combinación lineal de los vectores x , x^2 y x^4 .

Ejercicio VIII.

1. Determine si el vector $(2, -1, 1)^t$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1, 1)^t$, $(1, 1, 0)^t$ y $(1, 0, 0)^t$.
2. Determine si el vector $(-1, 3, 1)^t$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 1)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(-1, -1, -1)^t$.

Solución:

Definición 7 (Espacio generado). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, denotaremos

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Proposición 8. $\langle S \rangle$ es subespacio vectorial de V .

Demostración:

Definición 9 (Independencia Lineal). *Dados $v_1, \dots, v_n \in V$, diremos que forman un conjunto linealmente independiente si*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Observación VIII.

1. Es muy importante notar que la igualdad que aparece antes del símbolo implica, corresponde a una igualdad vectorial, mientras que el conjunto de igualdades que aparecen después del símbolo implica, corresponden a igualdades escalares.
2. Una familia de vectores que no es linealmente independiente, se dice linealmente dependiente.

Ejemplo IV. En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(0, 0, 1)^t$ son linealmente independientes. En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y como dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son iguales si y sólo si sus componentes son iguales, se sigue que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ejercicio IX.

1. Demuestre que en $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1, 0, 1)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(-1, -1, -1)^t$ son linealmente dependientes.
2. Demuestre que en $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1, 1, 1)^t$, $(1, 1, 0)^t$ y $(1, 0, 0)^t$ son linealmente independientes.

2.3. COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL

3. Demuestre que los vectores $(1, 0, 1, 0)^t, (0, -1, 1, 0)^t, (-1, 1, 1, 0)^t, (1, 1, 1, 1)^t$ son linealmente independientes.
4. Demuestre que en $\mathbb{R}[x]$ los vectores $1, x, x^2, \dots, x^n$ son linealmente independientes.
5. Demuestre que en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ los vectores $1, \text{sen}(x), \text{sen}(2x), \text{sen}(3x)$ son linealmente independientes.

Solución:

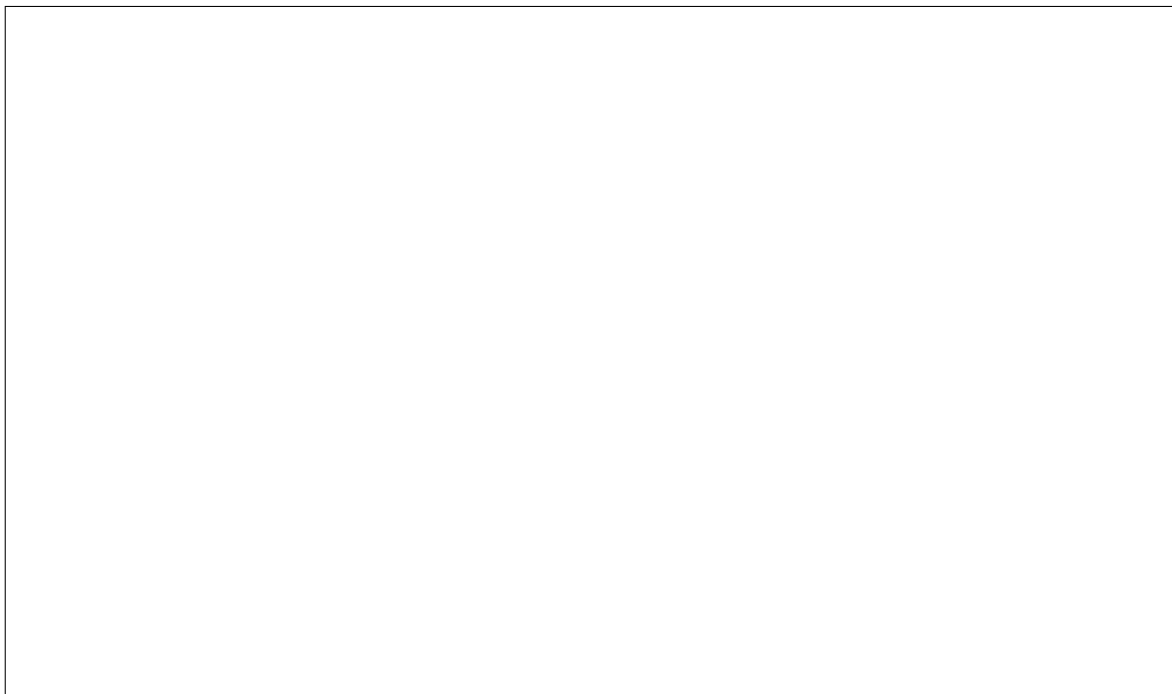
Proposición 10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces:

1. Si para algún $i = 1, \dots, n$, $v_i = 0$, entonces $v_1, \dots, v_n$ forman una familia linealmente dependiente.
2. Si $v_1 \neq \vec{0}$, $\{v_1\}$ es una familia l.i.

2.3. COMBINACIONES LINEALES E INDEPENDENCIA LINEAL

3. $\{v_1, v_2\}$ son una familia l.d. si y sólo si $v_1 = \alpha v_2$ o $v_2 = \alpha v_1$, para algún $\alpha \in \mathbb{K}$.
4. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una familia linealmente dependiente, para todo vector $v \in V$, $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es también una familia l.d.
5. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una familia linealmente independiente, para todo $j = 1, \dots, n$, $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ es también una familia l.i.

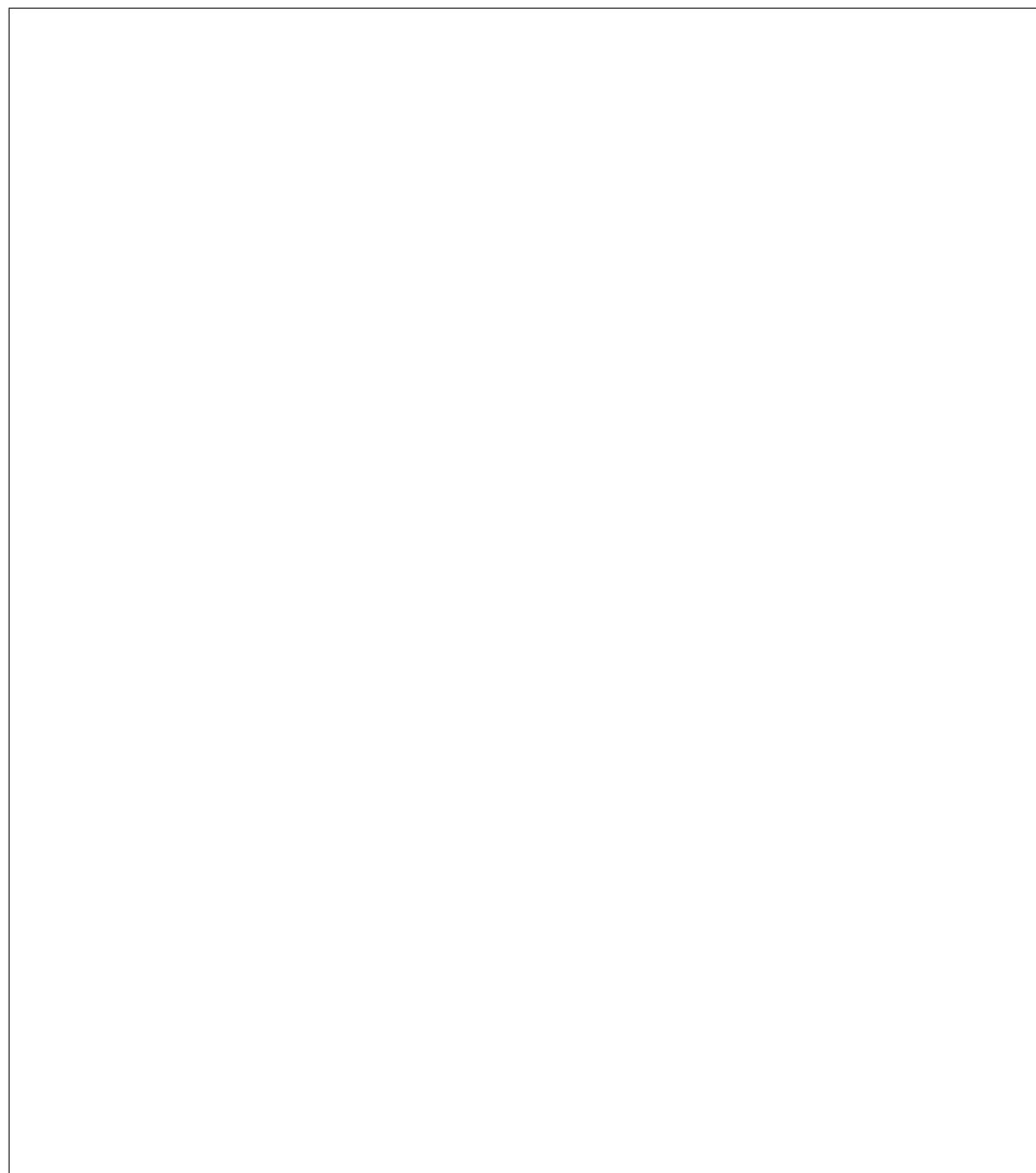
Demostración:



Proposición 11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

1. $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ forman una familia linealmente dependiente si y sólo si para algún $j = 1, \dots, n$, v_j es combinación lineal del resto de los v_i .
2. Si v depende linealmente de $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ dependen linealmente de $\{w_1, \dots, w_m\} \subset V$, entonces v depende linealmente de $\{w_1, \dots, w_m\}$.
3. Si v no depende linealmente de $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ son una familia l.i., entonces $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es también una familia l.i.

Demostración:



Observación IX. Es posible interpretar un vector como un fragmento de una historia. cada vector l.i. es un trozo de la historia independiente, mientras que los vectores l.d. corresponden a información redundante.

2.4. Generadores y Bases

Definición 12 (Conjunto generador). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, diremos que S genera V si

$$\langle S \rangle = V.$$

Ejemplo V. En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(0, 0, 1)^t$ son un conjunto generador. En efecto, sean para todo $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 13. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un conjunto generador. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una familia l.i. Entonces $m \leq n$.

Demostración:

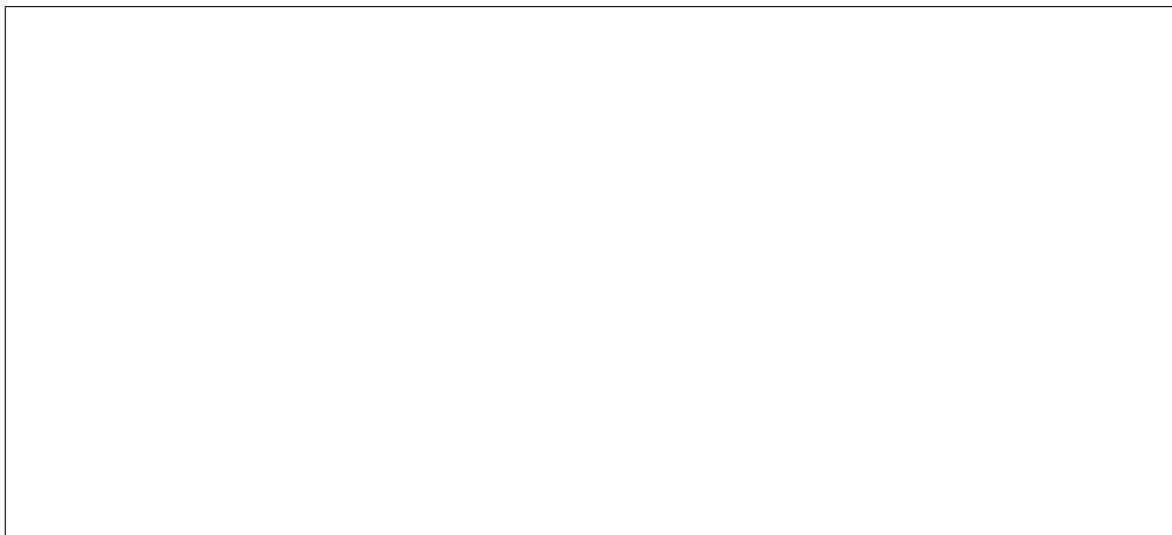
2.4. GENERADORES Y BASES

Definición 14 (Base). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Diremos que S es una base de V , si es un conjunto generador y a la vez una familia l.i.

Ejemplo VI. En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0)^t$ y $(0, 0, 1)^t$ forman una base.

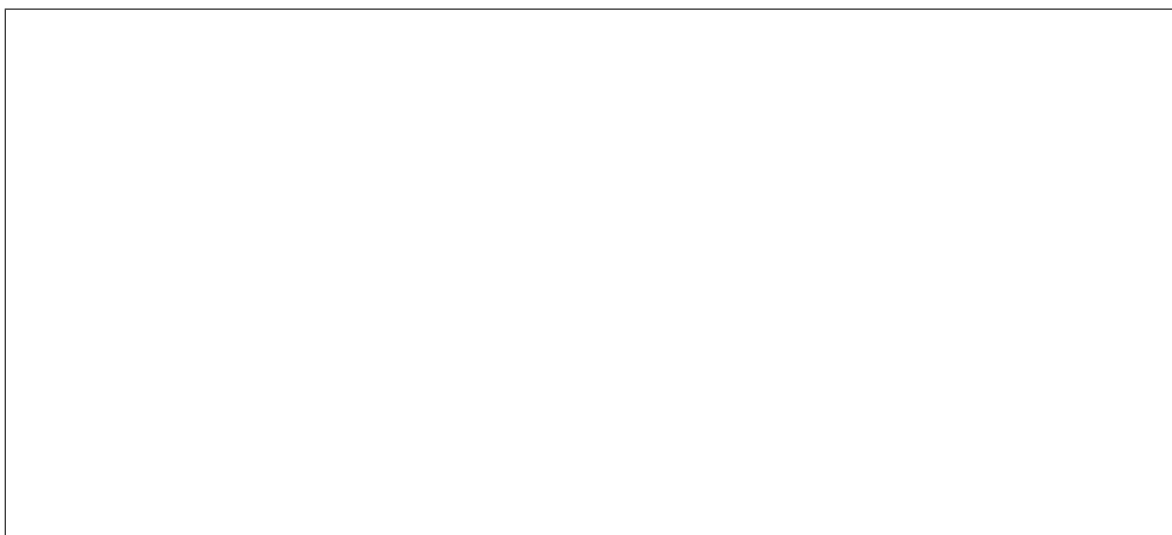
Proposición 15. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, tal que $\langle S \rangle = V$. Entonces existe $S' \subset S$ que es base para V .

Demostración:



Teorema 16. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $S' = \{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ dos bases para V . Entonces $m = n$. Es decir todas las bases de V tienen el mismo tamaño. A este número lo llamaremos la dimensión de V y lo denotaremos por $\dim(V)$.

Demostración:



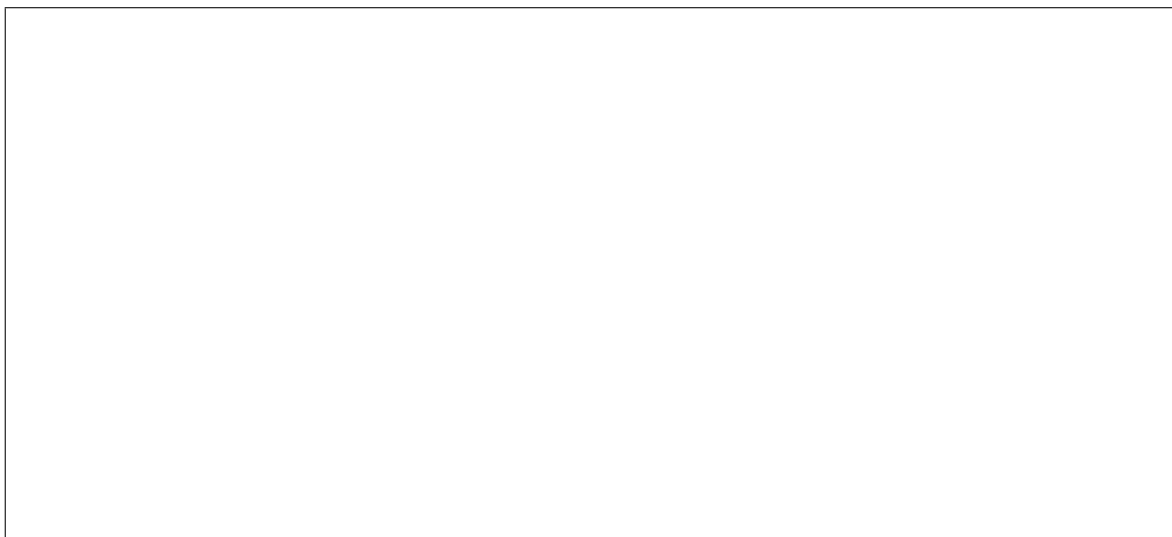
2.4. GENERADORES Y BASES

Observación X. Por convención $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Proposición 17. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Entonces

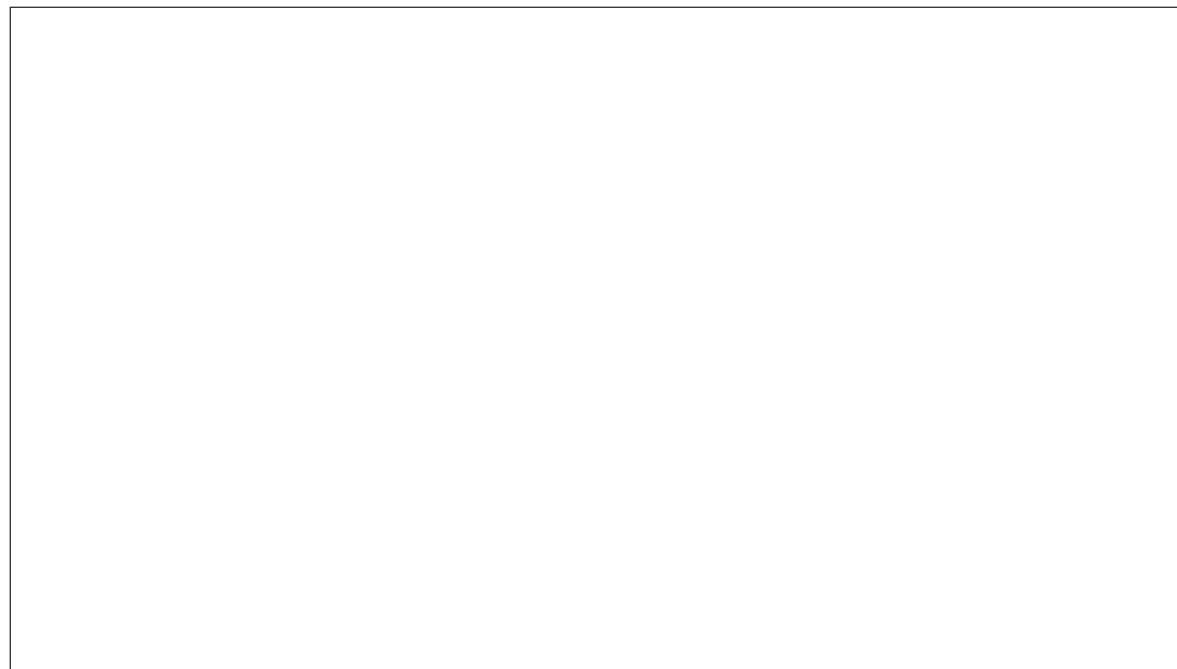
1. Si S es un generador de V , entonces $n \geq \dim(V)$.
2. Si S es una familia l.i de V , entonces $n \leq \dim(V)$.
3. Si S es una familia l.i de V y $\dim(V) = n$, entonces S es base de V .

Demostración:



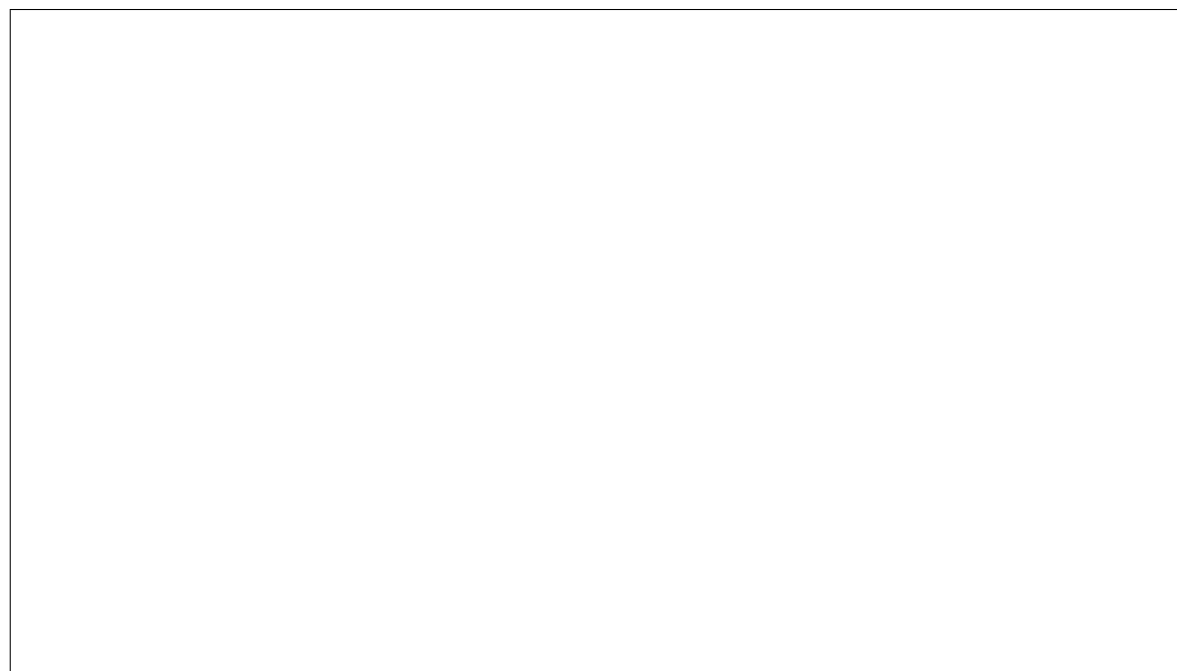
Teorema 18. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Entonces toda familia l.i. se puede completar para construir una base.

Demostración:



Proposición 19. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Con igualdad si y sólo si $U = V$.*

Demostración:

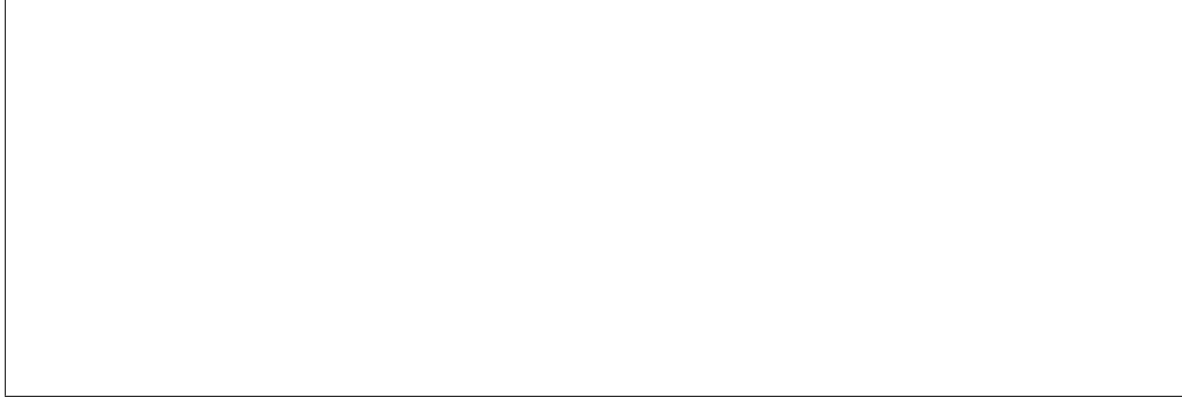


2.5. Coordenadas

Proposición 20. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Entonces para todo v existe una única familia de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Demostración:



Gracias a la proposición anterior, notamos que dada una base en V , a cada vector $v \in V$ le podemos asociar de manera única un elemento de $\mathbb{K}^n$. A dicho elemento lo llamaremos las coordenadas de V en la base S y lo denotaremos $\text{COOR}(v)$.

Proposición 21. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Entonces

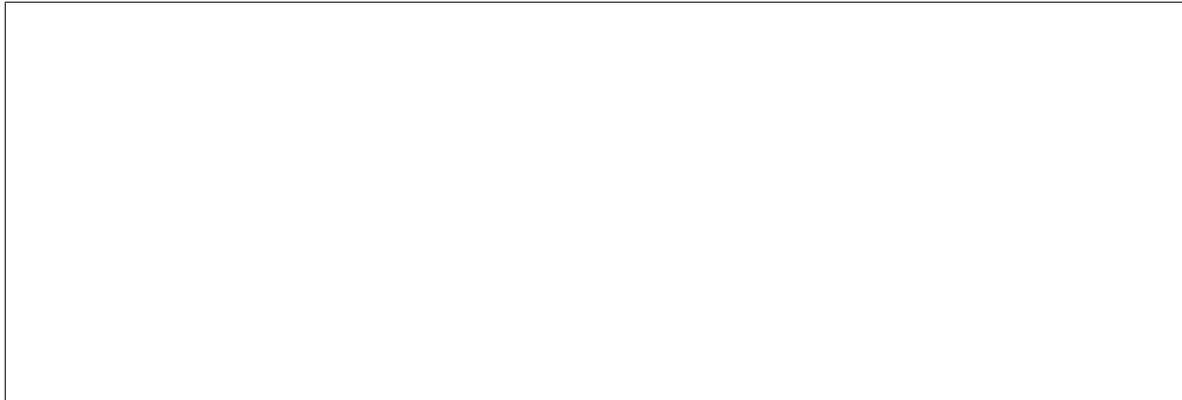
$$\text{COOR} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rightarrow \text{COOR}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$$

es biyectiva y para todo $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in V$ se cumple

$$\text{COOR}(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 \text{COOR}(v_1) + \mu_2 \text{COOR}(v_2).$$

Demostración:



Observación XI. La aplicación COOR es un ejemplo de isomorfismo entre espacios vectoriales. Se dice que los espacios vectoriales U y W son isomorfos, si existe entre ellos una biyección lineal. Que dos espacios vectoriales sean isomorfos quiere decir que cualquier propiedad que se cumpla en U y que dependa sólo de su estructura de espacio vectorial, se cumplirá también en W .

Proposición 22. Para cada $v \in V$ sea $v^* = \text{COOR}(v)$. Entonces $w_1, \dots, w_m$ son linealmente independientes en V si y sólo si $w_1^*, \dots, w_m^*$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}^n$.

Demostración:



2.6. Suma de Subespacios Vectoriales

Definición 23. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios de V . Se define la suma U y W como

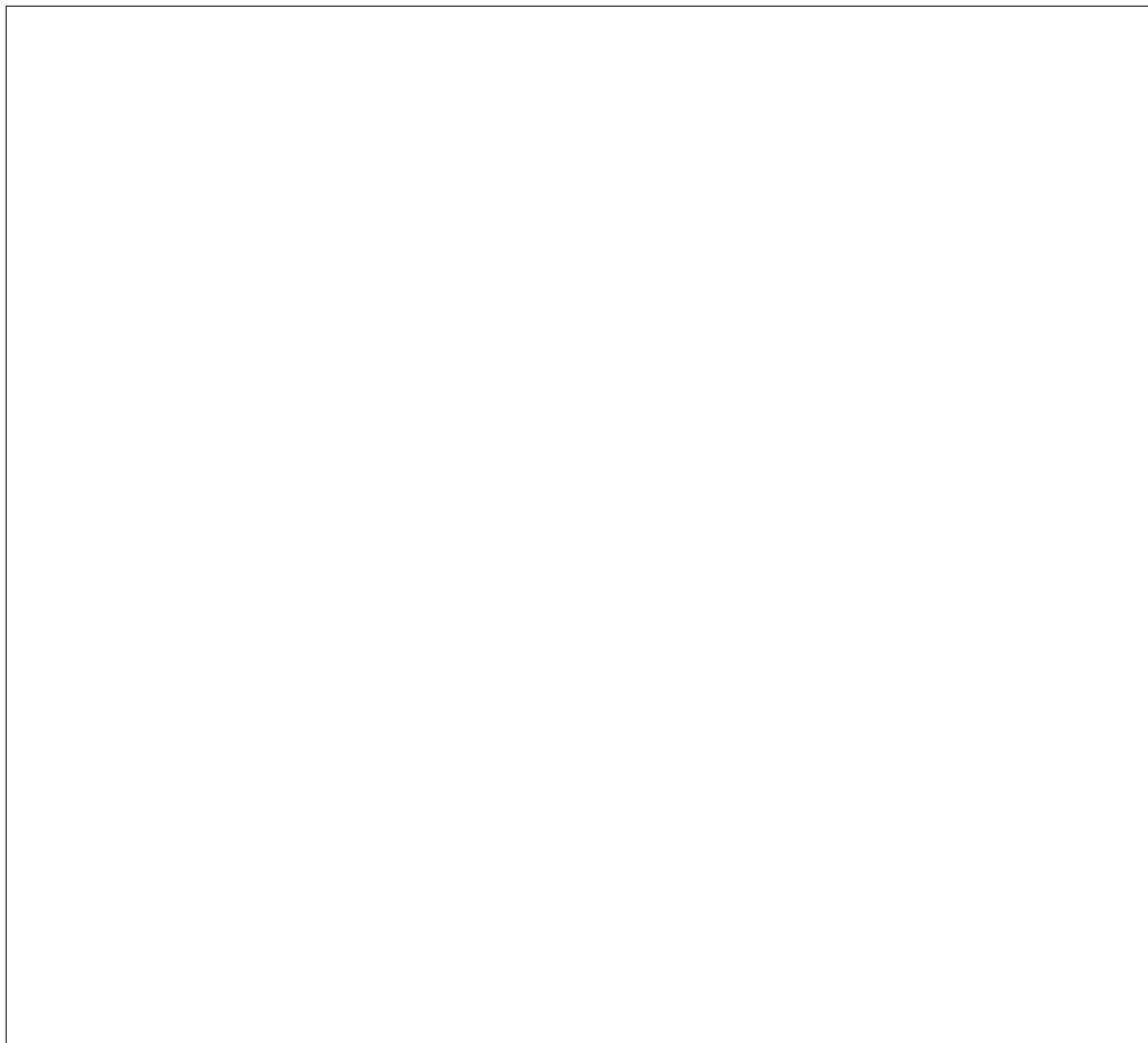
$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}.$$

Proposición 24. Se cumple:

1. $U + W$ es subespacio vectorial de V .
2. $U + W$ es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a U y a W .
3. Si U y W son de dimensión finita $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.
4. Si $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ y $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, entonces

$$U + W = \langle u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m \rangle.$$

Demostración:



Ejemplo VII. Sea

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y - z = 0\}.$$

Calculemos $U + W$. Lo primero es que notemos que $U = \langle \{(1, 0, -1)^t, (0, 1, -1)^t\} \rangle$, mientras que $W = \langle (0, 1, 1)^t \rangle$. Notemos ahora que los vectores que engendran U y W son l.i. En efecto, si

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la primera ecuación se obtiene $\alpha = 0$, lo que transforma la segunda y la tercera ecuación en:

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

2.6. SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

de donde se sigue fácilmente que $\beta = \gamma = 0$. Luego, en $U + W$ viven tres vectores l.i. y por lo tanto tiene dimensión mayor o igual a 3, y como $U + W \subset \mathbb{R}^3$, concluimos que $U + W = \mathbb{R}^3$.

Definición 25 (Suma directa de s.e.v.). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios de V . Diremos que la suma de U y W es directa si todo vector $v \in U + W$ se descompone de manera única como $v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$. En tal caso la suma de U y W se denota $U \oplus W$.

Ejemplo VIII. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ la suma de $U := \langle (1, 1, 0, 0)^t \rangle$ y $W := \langle (0, 0, 1, 1)^t \rangle$. Sea $v \in U + W$ y supongamos que se puede descomponer como $v = u_1 + w_1$ y como $v = u_2 + w_2$ con $u_1, u_2 \in U$ y $w_1, w_2 \in W$. Queremos probar que $u_1 = u_2$ y $w_1 = w_2$. En efecto, como

$$u_i \in U \Rightarrow \exists \alpha_i : u_i = \alpha_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

análogamente

$$w_i \in W \Rightarrow \exists \beta_i : w_i = \beta_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

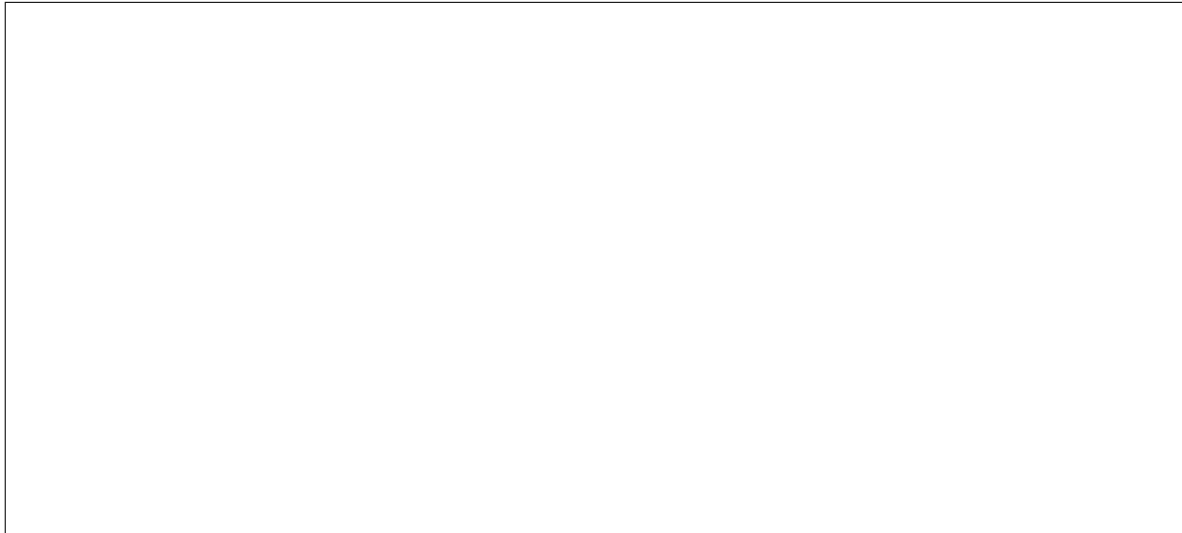
pero como $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$, es decir, $u_1 = u_2$ y $w_1 = w_2$.

Proposición 26. La suma de U y W es directa si y sólo si $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Demostración:



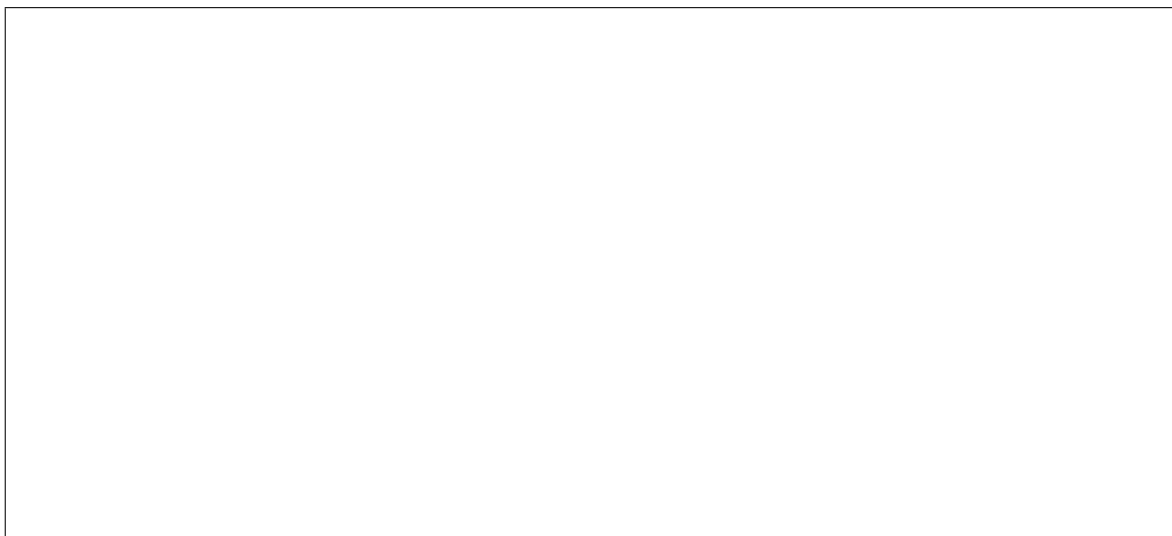
Ejercicio X. Sean

$$U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = t, z = -t, t \in \mathbb{R}\}.$$

Muestre que la suma de U y W es directa.

Solución:



Definición 27 (Espacios suplementarios). Dos subespacios vectoriales de V , U y W se dicen *suplementarios* si $U + W = V$ y $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Es decir la suma directa de U y W es igual a V , o en otras palabras, todo elemento $v \in V$ puede escribirse de manera única como $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$.

Ejemplo IX. Sea $\mathcal{F}$ el e.v. de funciones reales y

$$U = \{f \in \mathcal{F} : f(x) = f(-x)\},$$

$$W = \{f \in \mathcal{F} : f(x) = -f(-x)\}.$$

Entonces U y W son suplementarios. En efecto, es fácil ver que ambos conjuntos son s.e.v. pues suma y multiplicación por escalar conserva la paridad de las funciones. Por otro lado, supongamos que una función $f \in U \cap W$, entonces para todo x , $f(-x) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$, es decir $f(x) = -f(x)$, lo que implica que $f(x) = 0$ para todo x . Por lo tanto $U \cap W = \{0\}$ y entonces U y W están en suma directa. Para terminar nos resta ver que todo elemento de $\mathcal{F}$ puede escribirse como la suma de un elemento en U y un elemento en W . Para ello basta notar que

$$u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

es una función par, mientras que

$$w(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

es una función impar. Además es claro que $f = u + w$.

2.6. SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio XI. Sean

$$U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = t, z = -t, t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces U y W son suplementarios.

Solución:

Proposición 28. Si V es un e.v. de dimensión finita, entonces todo subespacio U de V tiene un subespacio vectorial suplementario.

Demostración:

2.7. Transformaciones Lineales

Definición 29. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal (también llamado homomorfismo) si:

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Ejemplo X. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f((x, y, z)^t) = (2x - y + 4z, -3x + 5y + 6z)^t.$$

Veamos que f es una función lineal. En efecto, note que

$$f((x, y, z)^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)^t + \mu(u, v, w)^t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda y + \mu v \\ \lambda z + \mu w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu u \\ \mu v \\ \mu w \end{pmatrix} \\ &= \lambda f((x, y, z)^t) + \mu f((u, v, w)^t), \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado la definición de suma y multiplicación por escalar de matrices, mientras que en la segunda hemos usado la definición de suma de matrices y la distributividad de la multiplicación de matrices con respecto a la suma.

Ejercicio XII. Sea $C^1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\}$ y sea $L : C^1 \rightarrow \mathcal{F}$ dada por $D(f) = f'$. Muestre que C^1 es espacio vectorial y que D es una función lineal definida en este espacio.

Solución:

Ejercicio XIII. Sean U_1 y U_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V . Si U_1 y U_2 son suplementarios, entonces dado $v \in V$, entonces $v = u_1 + u_2$ con $u_i \in U_i$ únicamente determinados. Se define la proyección de V en U_i como la función $p_i : V \rightarrow U_i$ dada por $p_i(v) = u_i$. Pruebe que p_i es lineal.

Solución:

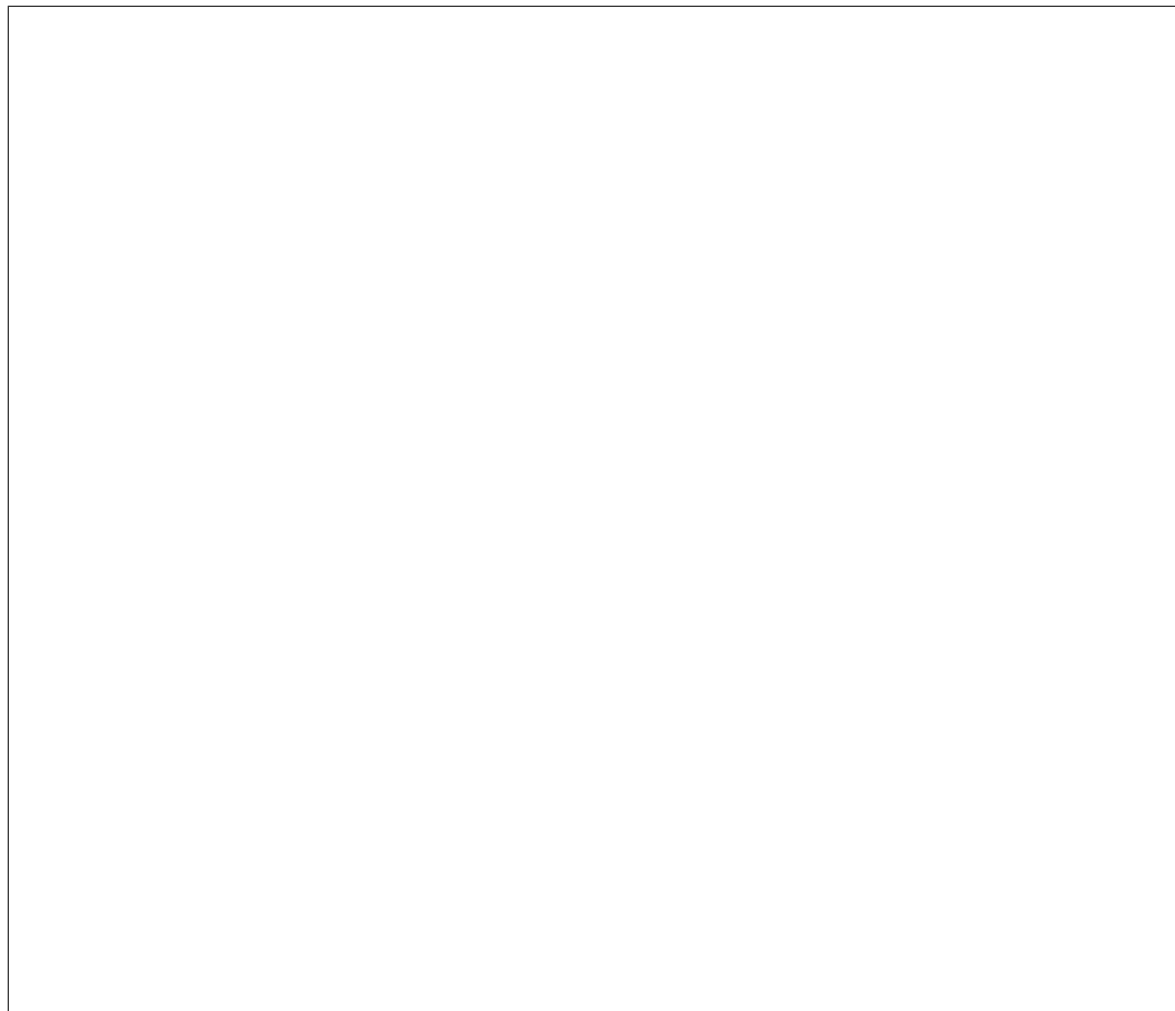
Proposición 30. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces:

1. $\forall v_1, \dots, v_n \in V, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

2. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son una familia linealmente dependiente en V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ son una familia linealmente dependiente en W .
3. Si $g : W \rightarrow U$ es una aplicación lineal, entonces $g \circ f : V \rightarrow U$ es también una aplicación lineal.

Demostración:



Definición 31. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Llamaremos núcleo de f al subconjunto de todos los elementos en V cuya imagen por f es igual a $\vec{0} \in W$. Lo denotaremos por $\ker(f)$. Es decir:

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = \vec{0}\}.$$

Llamaremos imagen de f , el que denotaremos por $\text{Im}(f)$ a la imagen de V a través de f . Es decir:

$$\text{Im}(f) = f(V) = \{w \in W : \exists v \in V, f(v) = w\}.$$

Llamaremos $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Ejemplo XI (Continuación del Ejemplo X). El $\ker(f)$ está dado por todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

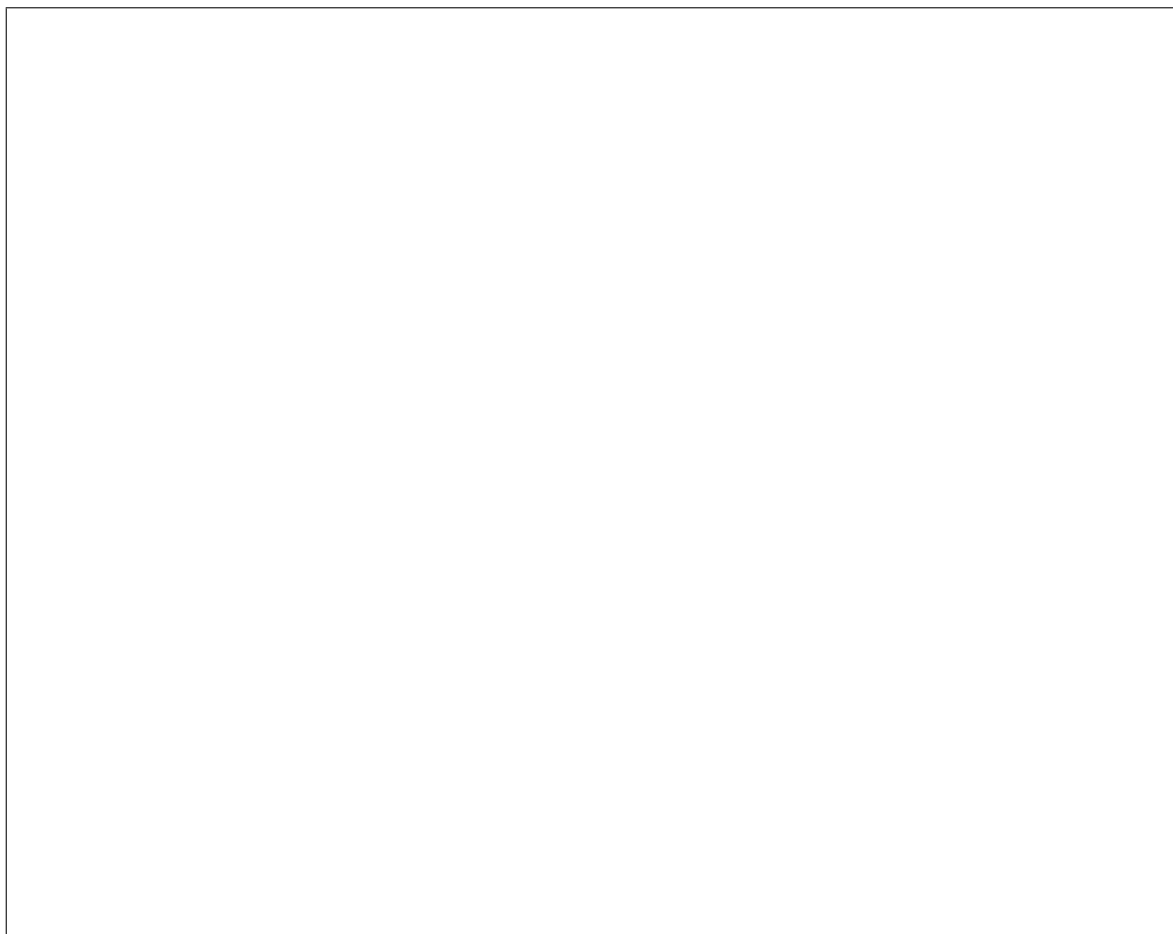
es decir, $\ker(f) = \langle (13/6, 1, -7/24)^t \rangle$.

Ejemplo XII (Continuación del Ejemplo [XII](#)). El $\ker(D)$ es el conjunto de funciones constantes. En efecto, como la derivada de una constante es 0 es directo que las funciones constantes pertenecen a $\ker(D)$. Por otro lado, si una función tiene derivada nula, gracias al Teorema del Valor Medio, se sabe que es constante y por lo tanto, el núcleo de D son exactamente las funciones constantes.

Proposición 32. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces

1. $\text{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de W .
2. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son un generador de V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ son un generador de $\text{Im}(f)$.
3. $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de V .

Demostración:



Teorema 33 (Teorema Núcleo - Imagen). Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si V tiene dimensión finita, entonces

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V).$$

Demostración:

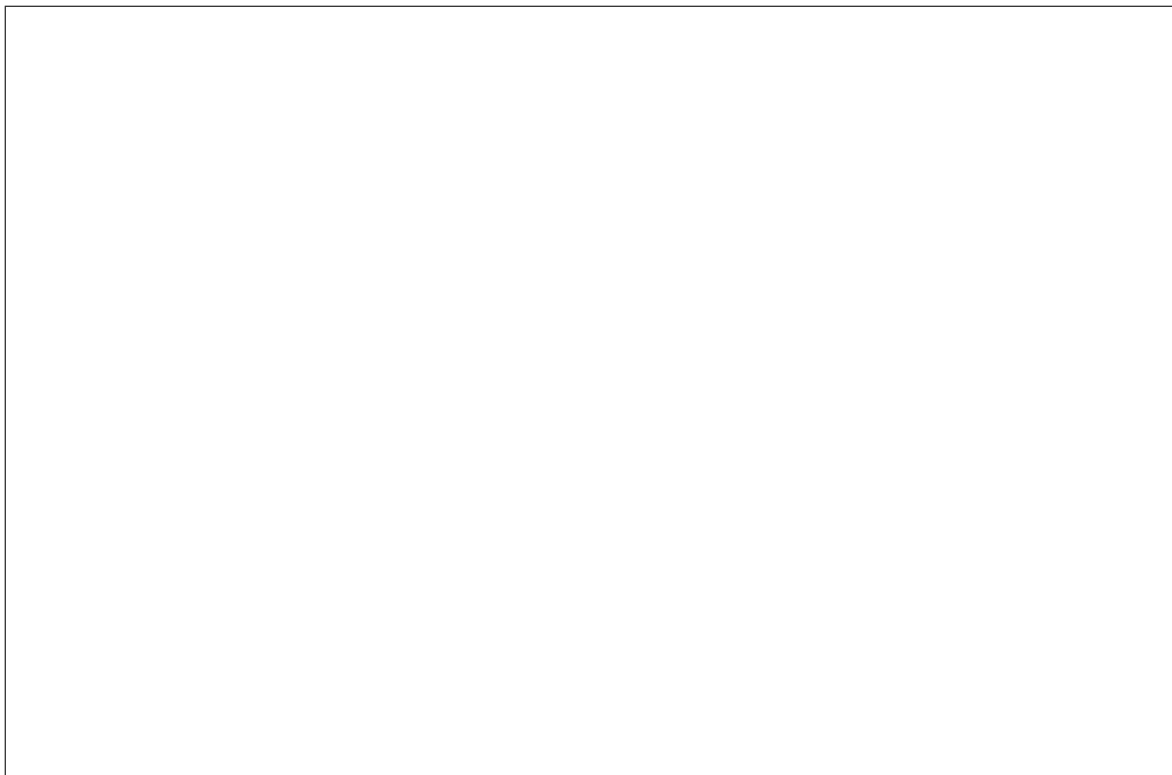
Ejercicio XIV. Consideremos P_3 el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a 3. Entonces P_3 es subespacio vectorial de dimensión finita de C^1 . Considere $D : P_3 \rightarrow \mathcal{F}$, dada por $D(p) = p'$. Muestre que $\text{Im}(D) = P_2$, los polinomios de grado menor o igual a 2. Verifique que se satisface el Teorema de Numelo-Imagen.

Solución:

Proposición 34. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces, f inyectiva es equivalente a:

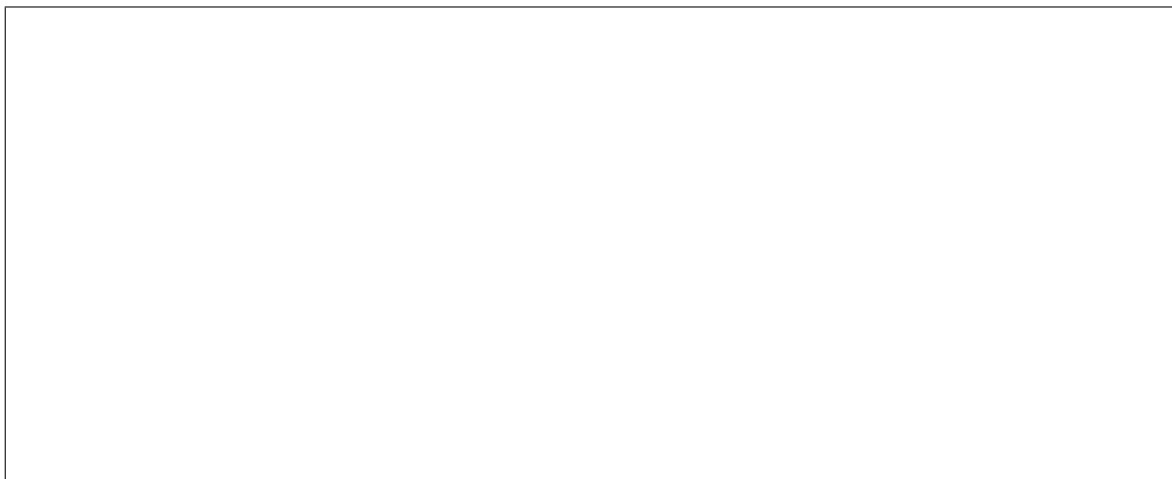
1. $\ker(f) = \{\vec{0}\}$.
2. $v_1, \dots, v_n \in V$ es una familia l.i. de V , si y sólo si $f(v_1), \dots, f(v_n)$ es una familia l.i. de $\text{Im}(f)$.
3. $v_1, \dots, v_n \in V$ es una base de V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ es una base de $\text{Im}(f)$.

Demostración:



Proposición 35. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si V tiene dimensión finita, entonces $\text{rang}(f) = \dim(V)$ si y sólo si f es inyectiva.

Demostración:



Definición 36. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si f es lineal y biyectiva diremos que f es un isomorfismo y que V y W son isomorfos.

Ejemplo XIII. Dado un e.v. V de dimensión n , $\text{COOR} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo.

Proposición 37. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La composición de isomorfismos es isomorfismo.*

2. *$f : V \rightarrow W$ lineal es isomorfismo si y sólo si*

$$\text{Im}(f) = W \text{ y } \ker(f) = \{\vec{0}\}.$$

3. *Si V tiene dimensión finita y $f : V \rightarrow W$ es una función lineal. Entonces: f es un isomorfismo si y sólo si*

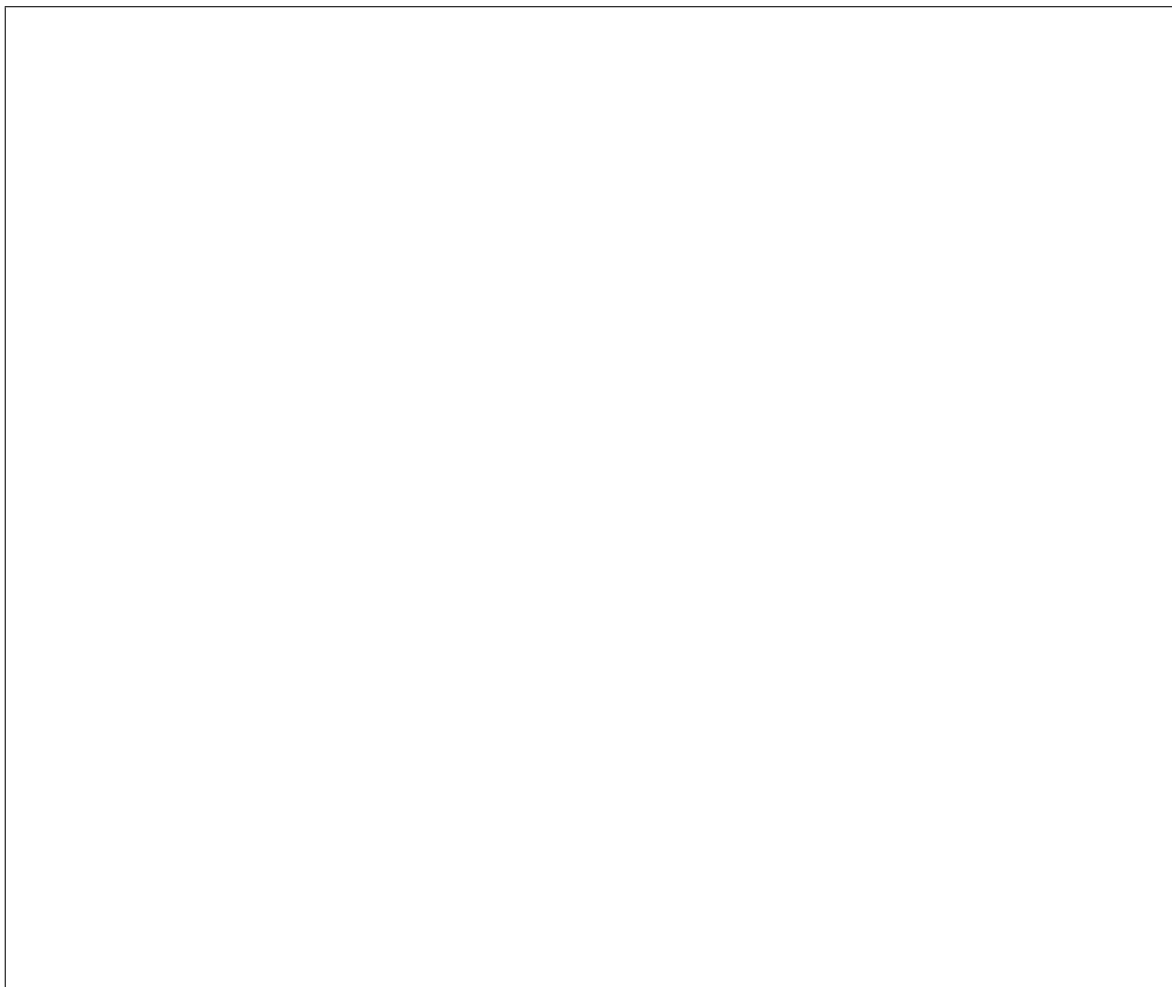
$$\dim V = \text{rang}(f) = \dim(W).$$

4. *Si V tiene dimensión finita, $f : V \rightarrow V$ es isomorfismo si y sólo si es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.*

5. *Si $f : V \rightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $f^{-1} : W \rightarrow V$ es un isomorfismo.*

6. *Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.*

Demostración:



2.8. Matriz Representante de una Transformación Lineal

Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $v_1, \dots, v_n \in V$ es una base de V . Entonces dado $v \in V$, sabemos que existe una familia $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de elementos de $\mathbb{K}$, tales que:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,$$

y entonces

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

Luego, para cualquier $v \in V$, $f(v)$ está completamente determinada por sus coordenadas en una base dada $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y la acción de la función f sobre esta base. Más aún, si en W se cuenta con una base $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ entonces para cada $i = 1, \dots, n$, $f(v_i)$ se puede expresar como:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m \mu_{ji} w_j,$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_{ji} w_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \mu_{ji} \lambda_i \right) w_j \\ &= \sum_{j=1}^m (M_{\beta_V \beta_W}(f) \lambda)_j w_j, \end{aligned}$$

donde hemos llamado $M_{\beta_V \beta_W}(f)$ a la matriz cuyo coeficiente ji está dado por μ_{ji} y λ al vector de $\mathbb{K}^n$ coordenadas de v en la base β_V . Notemos que en particular las coordenadas de $f(v)$ en la base β_W están dadas por el vector $M_{\beta_V \beta_W}(f) \lambda$, así toda la información relevante de la transformación lineal con respecto a las bases β_V y β_W está contenida en la matriz $M_{\beta_V \beta_W}(f)$, a esta matriz le llamamos matriz representante de f en dichas bases. Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{COOR}_V \downarrow & & \downarrow \text{COOR}_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{M_{\beta_V \beta_W}(f)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Ejemplo XIV. Calculemos la matriz representante de $D : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ dado por $D(p) = p'$. En ambos conjuntos consideramos sus bases canónicas $\{1, x, x^2, x^3\}$ y $\{1, x, x^2\}$ respectivamente. Entonces:

$$D(1) = 0, \quad D(x) = 1, \quad D(x^2) = 2x, \quad D(x^3) = 3x^2,$$

de donde se sigue que la matriz representante de D está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.8. MATRIZ REPRESENTANTE DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Proposición 38. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \rightarrow W, f \text{ es lineal}\},$$

entonces se tiene:

1. $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones naturales de espacio funcional.
2. Si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces $\mathcal{L}(V, W)$ es isomorfo a $M_{m,n}(\mathbb{K})$ y entonces $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.

Demostración:



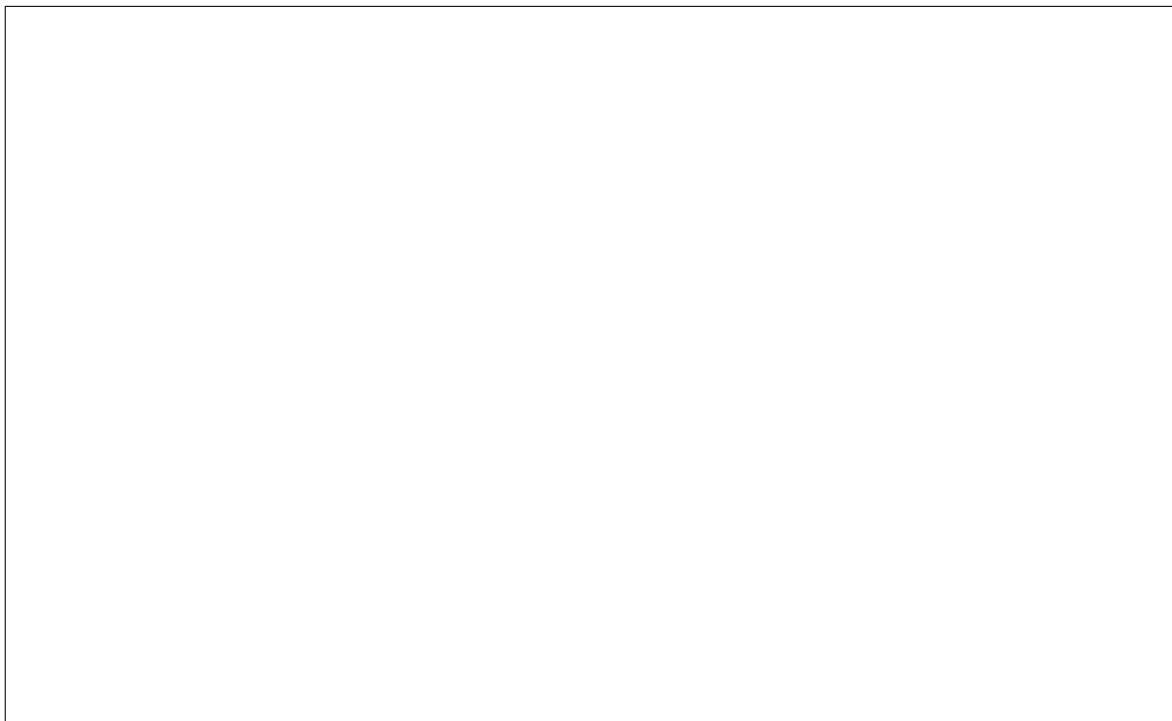
Proposición 39. Sean U , V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales. Entonces, dadas bases β_U , β_V y β_W de U , V y W respectivamente, se tiene que

$$M_{\beta_U \beta_W}(g \circ f) = M_{\beta_V \beta_W}(g)M_{\beta_U \beta_V}(f).$$

En particular, f es un isomorfismo si y sólo si $M_{\beta_U \beta_V}(f)$ es regular. En tal caso,

$$M_{\beta_U \beta_V}(f^{-1}) = M_{\beta_U \beta_V}(f)^{-1}.$$

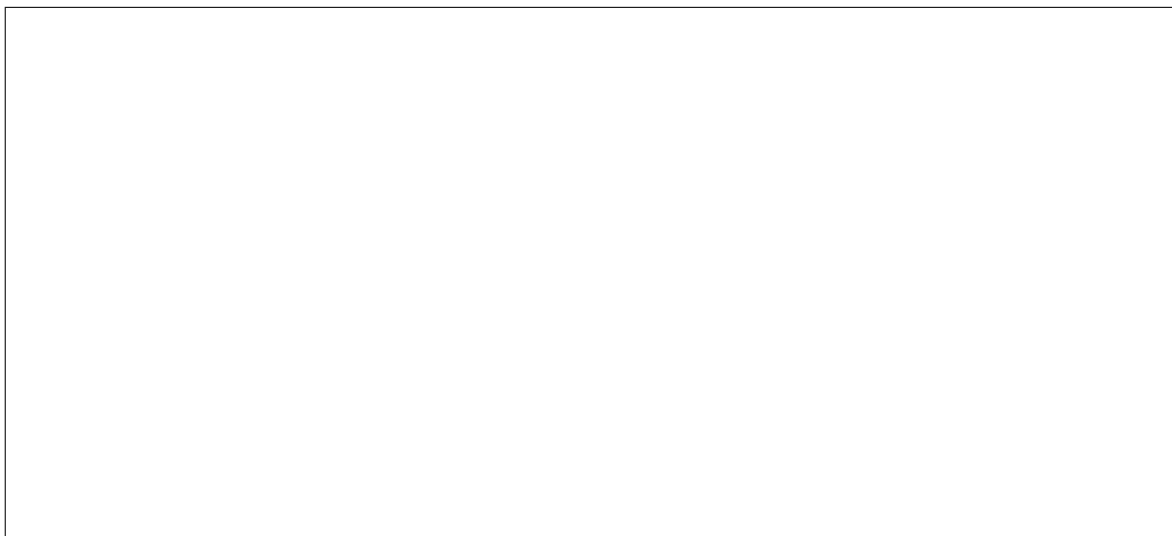
Demostración:



Teorema 40. *Para toda matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, son equivalentes:*

1. *A es regular.*
2. *$T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, v \rightarrow T_A(v) = Av$ es un isomorfismo.*
3. *Las columnas de A forman una base de $\mathbb{K}^n$.*

Demostración:



2.9. Cambios de Base

De lo hecho en la sección anterior, es claro que la matriz representante de una transformación lineal $f : V \rightarrow W$ depende de las bases escogidas en los espacios V y W . En esta sección veremos el efecto de cambiar la base en uno o los dos espacios en la matriz representante de f .

Sean $\beta_V = \{v_1 \dots, v_n\}$ y $\beta'_V = \{v'_1 \dots, v'_n\}$ dos bases de V y consideremos

$$\begin{aligned} \text{id}_V : (V, \beta_V) &\rightarrow (V, \beta'_V) \\ v &\rightarrow \text{id}_V(v) = v, \end{aligned}$$

tal cual en el caso general, existe una matriz representante para esta transformación lineal la cual se construye al igual que antes encontrando la representación de los elementos de la base β_V en la base β'_V . Es decir, buscamos los valores μ_{ji} tales que

$$\text{id}_V(v_i) = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} v'_j.$$

Así construimos la matriz $M_{\beta_V \beta'_V}(\text{id}_V)$ cuya entrada ji está dada por μ_{ji} . Al igual que antes tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ \text{COOR}_{\beta_V} \downarrow & M_{\beta_V \beta'_V}(\text{id}_V) & \downarrow \text{COOR}_{\beta'_V} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Notemos, que como id_V es un isomorfismo, la matriz $M_{\beta_V \beta'_V}(\text{id}_V)$ es invertible.

Análogamente, si consideramos dos bases distintas para W , β_W y β'_W podemos encontrar la matriz representante de id_W , que también será invertible porque id_W es también un isomorfismo. Con ello, para toda función lineal f tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (V, \beta_V) & \xrightarrow{f} & (W, \beta_W) \\ \text{id}_V \downarrow & & \uparrow \text{id}_W^{-1} \\ (V, \beta'_V) & \xrightarrow{f} & (W, \beta'_W) \end{array}$$

de donde se sigue

$$f = \text{id}_W^{-1} \circ f \circ \text{id}_V,$$

y entonces

$$M_{\beta_V \beta_W}(f) = M_{\beta_W \beta'_W}(\text{id}_W)^{-1} M_{\beta'_V \beta'_W}(f) M_{\beta_V \beta'_V}(\text{id}_V).$$

Así, si bien la matriz representante de una transformación lineal no es única, todas ellas se relacionan vía la premultiplicación y postmultiplicación por matrices invertibles. Es decir son matrices semejantes.

2.10. Espacio Columna asociado a una matriz

Dada una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, es claro que la función

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\rightarrow Ax, \end{aligned}$$

corresponde a una transformación lineal. Como tal, tiene asociado un conjunto imagen $\text{Im}(T_A) \subset \mathbb{R}^m$. Calculemos este conjunto:

$$\text{Im}(T_A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}.$$

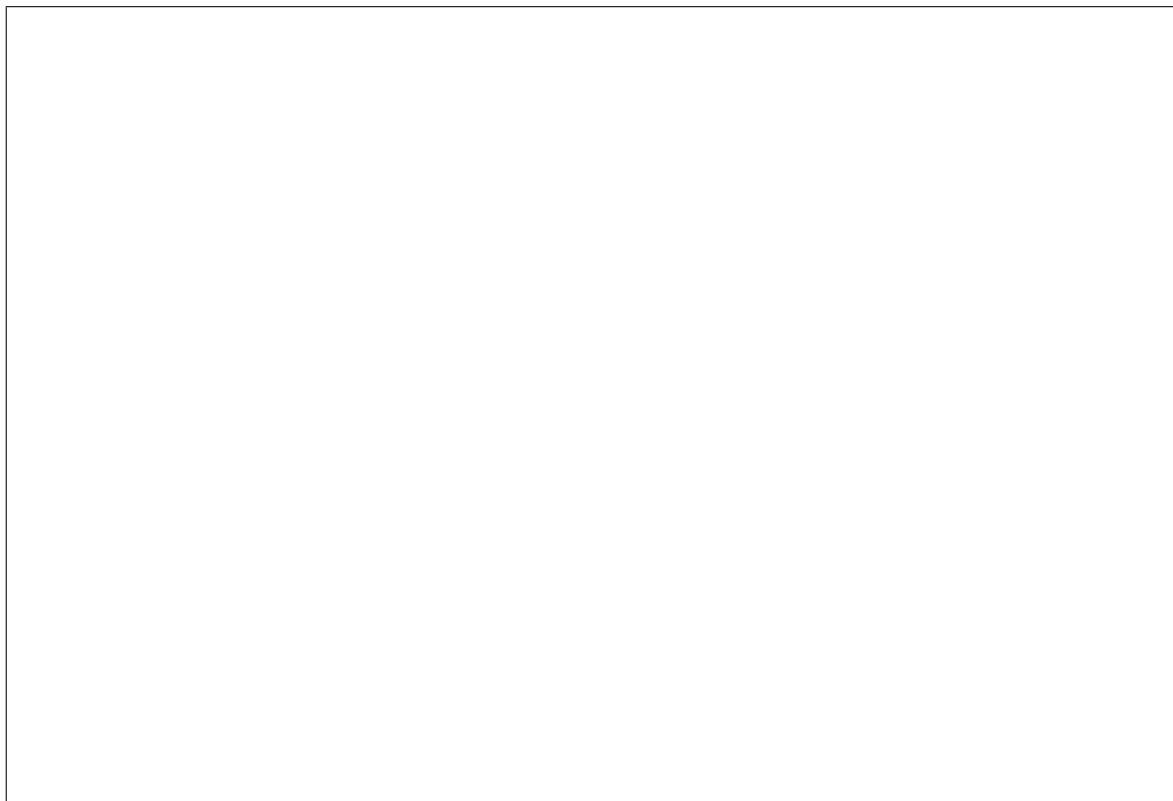
Notemos que este conjunto lo podemos caracterizar como el subconjunto de elementos $y \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema de ecuaciones $Ax = y$ tiene solución, pero además, dado que:

$$Ax = \sum_{i=1}^n A_{\bullet i} x_i,$$

donde $A_{\bullet i}$ es la i -ésima columna de A y corresponde a un vector de $\mathbb{R}^m$. Notemos que entonces, las imágenes de T_A corresponden a combinaciones lineales de las columnas de A , dicho todavía de otra manera las columnas de A son un conjunto generador de $\text{Im}(T_A)$. Con todo lo anterior la siguiente proposición es evidente:

Proposición 41. *El rango de una matriz A , $\text{rang}(A) := \text{rang}(T_A)$, es igual al número de columnas linealmente independientes que tiene la matriz A .*

Demostración:



Definición 42. Llamaremos espacio columna asociado a la matriz A al conjunto $\text{Im}(T_A)$.

Observación XII. En lo sucesivo usaremos indistintamente las notaciones $\text{Im}(T_A)$ e $\text{Im}(A)$.

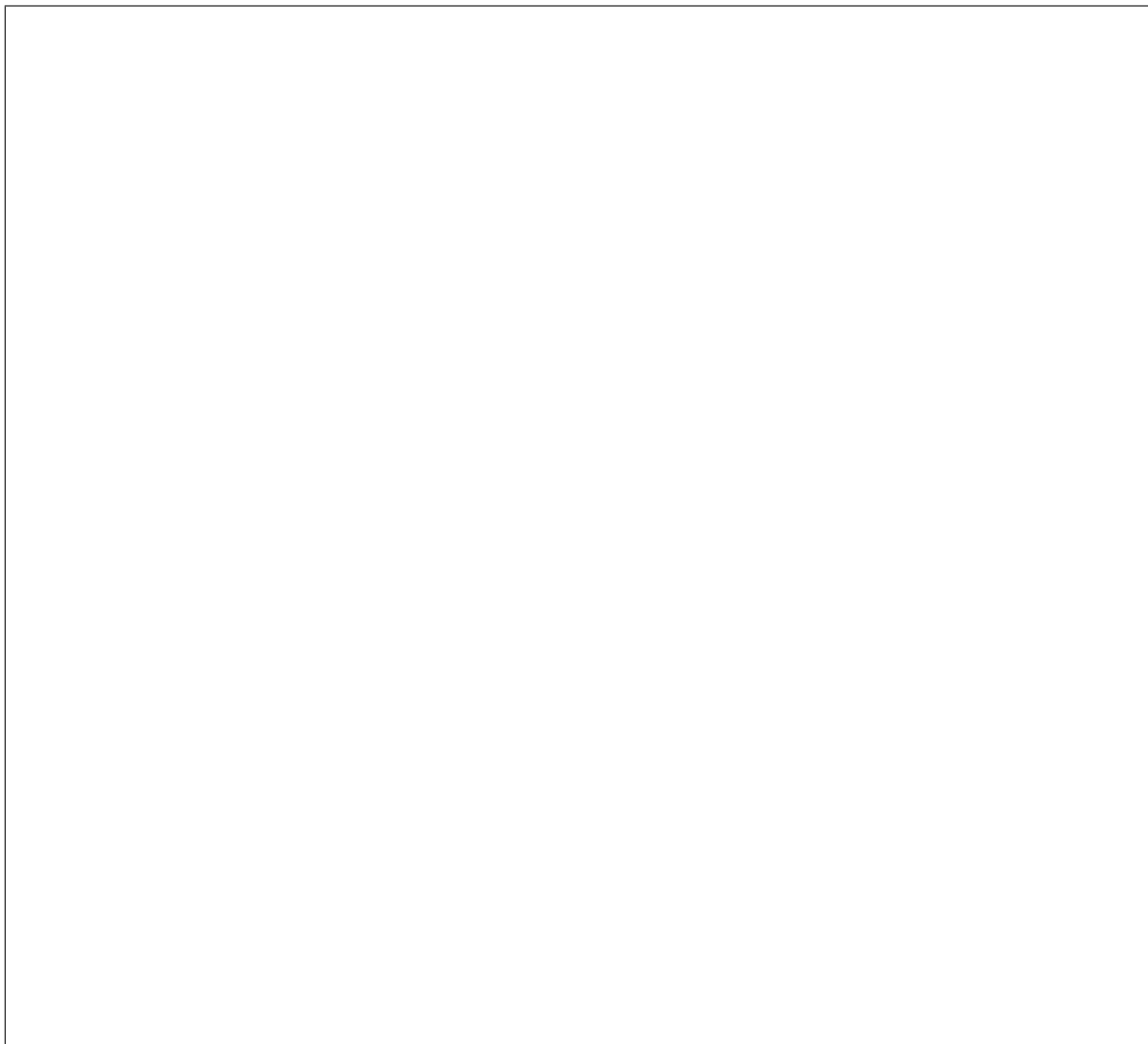
2.11. Espacio Fila asociado a una matriz

En el mismo contexto de la sección anterior, podemos mirar cada fila de la matriz A , denotadas por $A_{j\bullet}$, como un vector de $\mathbb{R}^n$.

Definición 43. Llamaremos espacio fila asociado a la matriz A al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A .

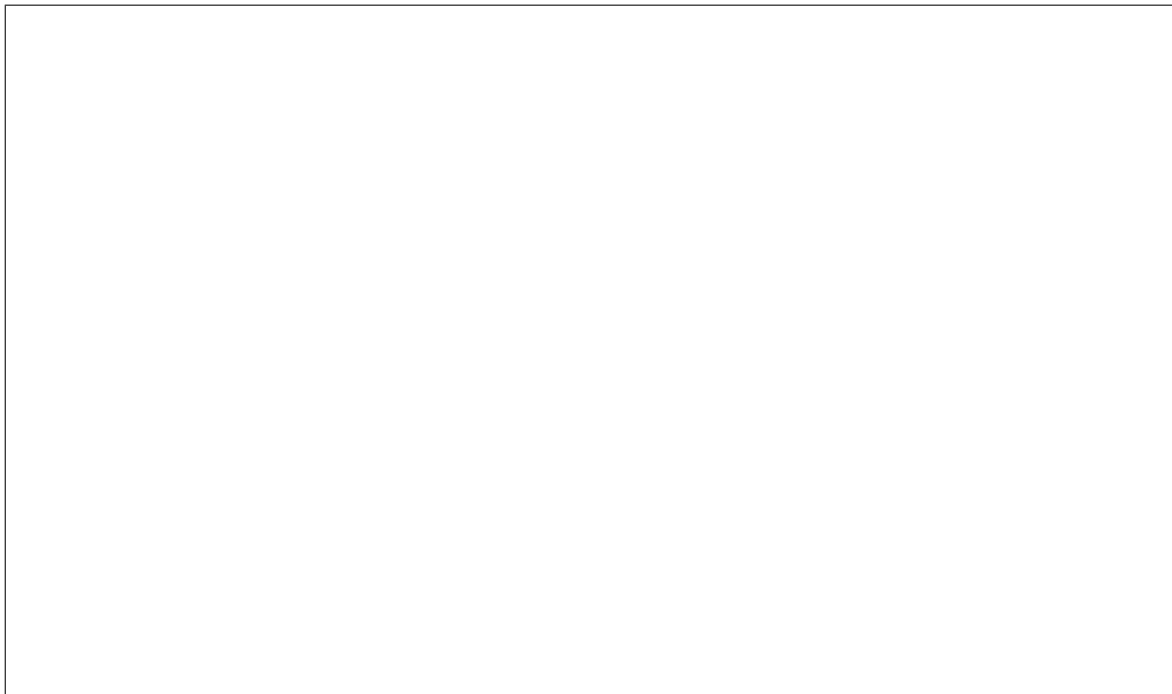
Proposición 44. El número de filas linealmente independientes en una matriz A es igual al número de columnas linealmente independientes de dicha matriz. Es decir, el rango de A es igual al número de filas linealmente independientes que tiene A .

Demostración:



Proposición 45. *Si B es una matriz invertible, el número de filas linealmente independientes en una matriz A es igual al número de filas linealmente independientes de la matriz BA .*

Demostración:



Así para calcular el rango de una matriz A , todo lo que tenemos que hacer es pivotear A con operaciones elementales y contar el número de filas distintas de 0 en la matriz escalonada.

2.12. Relación con sistemas de ecuaciones lineales

En el mismo contexto anterior, consideremos la ecuación

$$Ax = b. \tag{2.1}$$

Con el lenguaje de espacios vectoriales, la ecuación será incompatible si $b \notin \text{Im}(A)$, tendrá solución si $b \in \text{Im}(A)$ y la solución será única si A es un isomorfismo.

Por otro lado, las soluciones del sistema homogéneo:

$$Ax = 0,$$

corresponden, en el lenguaje de espacios vectoriales, a el núcleo de T_A . Sea $x_h \in \ker(T_A)$, entonces si x_p es cualquier solución de (2.1), es claro que $x_p + x_h$ también lo es.

Sea $\{x_1^h, \dots, x_r^h\}$ una base de $\ker(T_A)$, entonces para toda elección de escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, se tiene que

$$x_p + \alpha_1 x_1^h + \dots + \alpha_r x_r^h,$$

es también solución de (2.1). Notemos entonces, que el número de variables libres en un sistema lineal compatible es justamente la dimensión del núcleo de A . Finalmente, gracias al Teorema de Nucleo-Imagen, la dimensión de $\ker(A)$ está dada por $n - m$ más el número de filas que quedan iguales a 0 después de pivotear A con matrices elementales.

2.13. Resumen del capítulo

Espacios Vectoriales

Definición 1 (Espacio Vectorial). Una estructura algebraica $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (e.v.) sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, si:

1. $(V, +)$ es un grupo Abeliano.
2. La (multiplicación por escalar) $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, satisface
 - a) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall x, y \in V) : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$
 - b) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall x \in V) : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$
 - c) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})(\forall x \in V) : (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$
 - d) Si 1 es el elemento neutro para la multiplicación en $\mathbb{K}$, $(\forall x \in V) : 1 \cdot x = x.$

Teorema 2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se tiene:

1. $(\forall x, y, z \in V) : x + z = y + z \iff x = y.$
2. $(\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\})(\forall x, y \in V) : ax = ay \iff x = y.$
3. Si denotamos por $\vec{0}$ el neutro en $(V, +)$, $(\forall a \in \mathbb{K}) : a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$
4. Si denotamos por 0 el neutro en $(\mathbb{K}, +)$, $(\forall x \in V) : 0 \cdot x = \vec{0}.$
5. $a \cdot x = \vec{0} \iff x = \vec{0} \vee a = 0.$

Definición 3. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. $U \subset V$ se dirá subespacio vectorial (s.e.v.) de V si U es $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con las mismas operaciones que V .

Teorema 4. Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$. $U \subset V$ es s.e.v. de V si y sólo si:

1. $\vec{0} \in U.$

2. U es cerrado para la suma vectorial: $(\forall x, y \in U) : x + y \in U.$

3. U es cerrado para la multiplicación por escalar: $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall x \in U) : a \cdot x \in U.$

Corolario 5. Todo espacio vectorial tiene al menos un subespacio vectorial: $U = \{\vec{0}\}.$

Definición 6 (Combinación Lineal). Sean $v, v_1, \dots, v_n \in V$ diremos que v es combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$ si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Definición 7 (Espacio generado). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, denotaremos

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Proposición 8. $\langle S \rangle$ es subespacio vectorial de V .

Definición 9 (Independencia Lineal). Dados $v_1, \dots, v_n \in V$, diremos que forman un conjunto linealmente independiente si

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Proposición 10. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Entonces:

1. Si para algún $i = 1, \dots, n$, $v_i = 0$, entonces $v_1, \dots, v_n$ forman una familia linealmente dependiente.
2. Si $v_1 \neq \vec{0}$, $\{v_1\}$ es una familia l.i.
3. $\{v_1, v_2\}$ son una familia l.d. si y sólo si $v_1 = \alpha v_2$ o $v_2 = \alpha v_1$, para algún $\alpha \in \mathbb{K}$.
4. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una familia linealmente dependiente, para todo vector $v \in V$, $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es también una familia l.d.

5. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una familia linealmente independiente, para todo $j = 1, \dots, n$, $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ es también una familia l.i.

Proposición 11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$:

1. $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ forman una familia linealmente dependiente si y sólo si para algún $j = 1, \dots, n$, v_j es combinación lineal del resto de los v_i .
2. Si v depende linealmente de $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ dependen linealmente de $\{w_1, \dots, w_m\} \subset V$, entonces v depende linealmente de $\{w_1, \dots, w_m\}$.
3. Si v no depende linealmente de $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ son una familia l.i., entonces $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es también una familia l.i.

Definición 12 (Conjunto generador). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, diremos que S genera V si

$$\langle S \rangle = V.$$

Teorema 13. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un conjunto generador. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una familia l.i. Entonces $m \leq n$.

Definición 14 (Base). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Diremos que S es una base de V , si es un conjunto generador y a la vez una familia l.i.

Proposición 15. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, tal que $\langle S \rangle = V$. Entonces existe $S' \subset S$ que es base para V .

Teorema 16. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset$

V y $S' = \{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ dos bases para V . Entonces $m = n$. Es decir todas las bases de V tienen el mismo tamaño. A este número lo llamaremos la dimensión de V y lo denotaremos por $\dim(V)$.

Proposición 17. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Entonces

1. Si S es un generador de V , entonces $n \geq \dim(V)$.
2. Si S es una familia l.i. de V , entonces $n \leq \dim(V)$.
3. Si S es una familia l.i. de V y $\dim(V) = n$, entonces S es base de V .

Teorema 18. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Entonces toda familia l.i. se puede completar para construir una base.

Proposición 19. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces $\dim(U) \leq \dim(V)$. Con igualdad si y sólo si $U = V$.

Proposición 20. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Entonces para todo v existe una única familia de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Proposición 21. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base. Entonces

$$\text{COOR} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \rightarrow \text{COOR}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$$

es biyectiva y para todo $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in V$ se cumple

$$\text{COOR}(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 \text{COOR}(v_1) + \mu_2 \text{COOR}(v_2).$$

Proposición 22. Para cada $v \in V$ sea $v^* = \text{COOR}(v)$. Entonces $w_1, \dots, w_m$ son linealmente independientes en V si y sólo si $w_1^*, \dots, w_m^*$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}^n$.

Definición 23. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios de V . Se define la suma U y W como

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}.$$

Proposición 24. Se cumple:

1. $U + W$ es subespacio vectorial de V .
2. $U + W$ es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a U y a W .
3. Si U y W son de dimensión finita $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.
4. Si $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ y $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, entonces

$$U + W = \langle u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m \rangle.$$

Definición 25 (Suma directa de s.e.v.). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean U y W dos subespacios de V . Diremos que la suma de U y W es directa si todo vector $v \in U + W$ se descompone de manera única como $v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$. En tal caso la suma de U y W se denota $U \oplus W$.

Proposición 26. La suma de U y W es directa si y sólo si $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Definición 27 (Espacios suplementarios). Dos subespacios vectoriales de V , U y W se dicen suplementarios si $U + W = V$ y $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Es decir la suma directa de U y W es igual a V , o en otras palabras, todo elemento $v \in V$ puede escribirse de manera única como $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$.

Proposición 28. Si V es un e.v. de dimensión finita, entonces todo subespacio U de V tiene un subespacio vectorial suplementario.

Definición 29. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal (también llamado homomorfismo) si:

$$\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Proposición 30. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces:

1. $\forall v_1, \dots, v_n \in V, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i).$$

2. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son una familia linealmente dependiente en V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ son una familia linealmente dependiente en W .
3. Si $g : W \rightarrow U$ es una aplicación lineal, entonces $g \circ f : V \rightarrow U$ es también una aplicación lineal.

Definición 31. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Llamaremos núcleo de f al subconjunto de todos los elementos en V cuya imagen por f es igual a $\vec{0} \in W$. Lo denotaremos por $\ker(f)$ Es decir:

$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = \vec{0}\}.$$

Llamaremos imagen de f , el que denotaremos por $\text{Im}(f)$ a la imagen de V a través de f . Es decir:

$$\text{Im}(f) = f(V) = \{w \in W : \exists v \in V, f(v) = w\}.$$

$$\text{Llamaremos } \text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Proposición 32. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces

1. $\text{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de W .

2. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son un generador de V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ son un generador de $\text{Im}(f)$.

3. $\ker(f)$ es un subespacio vectorial de V .

Teorema 33 (Teorema Núcleo - Imagen). Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si V tiene dimensión finita, entonces

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V).$$

Proposición 34. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Entonces, f inyectiva es equivalente a:

1. $\ker(f) = \{\vec{0}\}$.
2. $v_1, \dots, v_n \in V$ es una familia l.i. de V , si y sólo si $f(v_1), \dots, f(v_n)$ es una familia l.i. de $\text{Im}(f)$.
3. $v_1, \dots, v_n \in V$ es una base de V , entonces $f(v_1), \dots, f(v_n)$ es una base de $\text{Im}(f)$.

Proposición 35. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si V tiene dimensión finita, entonces $\text{rang}(f) = \dim(V)$ si y sólo si f es inyectiva.

Definición 36. Sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Si f es lineal y biyectiva diremos que f es un isomorfismo y que V y W son isomorfos.

Proposición 37. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La composición de isomorfismos es isomorfismo.
2. $f : V \rightarrow W$ lineal es isomorfismo si y sólo si

$$\text{Im}(f) = W \text{ y } \ker(f) = \{\vec{0}\}.$$

3. Si V tiene dimensión finita y $f : V \rightarrow W$ es una función lineal. Entonces: f es un isomorfismo si y sólo si

$$\dim V = \text{rang}(f) = \dim(W).$$

4. Si V tiene dimensión finita, $f : V \rightarrow W$ es isomorfismo si y sólo si es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.
5. Si $f : V \rightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $f^{-1} : W \rightarrow V$ es un isomorfismo.
6. Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Proposición 38. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \rightarrow W, f \text{ es lineal}\},$$

entonces se tiene:

1. $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones naturales de espacio funcional.
2. Si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces $\mathcal{L}(V, W)$ es isomorfo a $M_{m,n}(\mathbb{K})$ y entonces $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.

Proposición 39. Sean U, V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales. Entonces, dadas bases β_U, β_V y β_W de U, V y W respectivamente, se tiene que

$$M_{\beta_U \beta_W}(g \circ f) = M_{\beta_V \beta_W}(g) M_{\beta_U \beta_V}(f).$$

En particular, f es un isomorfismo si y sólo si $M_{\beta_U \beta_V}(f)$ es regular. En tal caso,

$$M_{\beta_U \beta_V}(f^{-1}) = M_{\beta_U \beta_V}(f)^{-1}.$$

Teorema 40. Para toda matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, son equivalentes:

1. A es regular.
2. $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, v \rightarrow T_A(v) = Av$ es un isomorfismo.
3. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{K}^n$.

Proposición 41. *El rango de una matriz A , $\text{rang}(A) := \text{rang}(T_A)$, es igual al número de columnas linealmente independientes que tiene la matriz A .*

Definición 42. *Llamaremos espacio columna asociado a la matriz A al conjunto $\text{Im}(T_A)$.*

Definición 43. *Llamaremos espacio fila asociado a la matriz A al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A .*

Proposición 44. *El número de filas linealmente independientes en una matriz A es igual al número de columnas linealmente independientes de dicha matriz. Es decir, el rango de A es igual al número de filas linealmente independientes que tiene A .*

Proposición 45. *Si B es una matriz invertible, el número de filas linealmente independientes en una matriz A es igual al número de filas linealmente independientes de la matriz BA .*

2.14. Ejercicios

1. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares. Considere el producto cartesiano $V_1 \times V_2$, en el que se definen la suma y el producto por escalar mediante:

$$(v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2),$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Demuestre que con estas operaciones el conjunto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial.

2. Sea V un espacio vectorial y sean $V_1, \dots, V_n$ subespacios vectoriales de V . Demuestre que

$$\bigcap_{i=1}^n V_i$$

es un subespacio vectorial. ¿Qué sucede con la unión?

3. Considérese el espacio vectorial $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que M_1, M_2, M_3, M_4 son linealmente independientes.

4. Considérese el espacio vectorial $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Encuentre el valor de α para que M_1, M_2, M_3, M_4 sean linealmente dependientes.

5. Considere el espacio vectorial de las funciones reales. Considere las funciones $f_i(x) = e^{a_i x}$, para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que las funciones son linealmente independientes si y sólo si las constantes a_i son todas distintas.

6. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ el generado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el espacio suplementario de U y calcule las proyecciones sobre U y su suplementario.

2.14. EJERCICIOS

7. Sea $S = \{1 + 2x, -1 + x^2, 1 + 3x + 2x^2\}$.

Muestre que S es una base de P_2 , los polinomios de grado menor o igual a 2. Calcule $\text{COOR} : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función coordenadas asociada a S .

8. Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- a) Determine una base de W y su dimensión.
 b) Extienda la base encontrada en el punto anterior a una base de $\mathbb{R}^4$.
9. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares. Considere el producto cartesiano $V_1 \times V_2$, en el que se definen la suma y el producto por escalar mediante:

$$(v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) = (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2),$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

En el Ejercicio 1 de esta lista se demostró que con estas operaciones el conjunto $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial. Demuestre que si V_1 y V_2 son de dimensión finita, entonces $V_1 \times V_2$ también lo es y que

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

10. Sean $M_{22}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales y $\mathcal{P}_2$ los polinomios reales de grado menor o igual a 2. Considere

$$T : M_{22}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b) + (a + b + c)x + (a + b + c + d)x^2$$

- a) (4 pts) Demuestre que T es una transformación lineal.

- b) (6 pts) Sean $\beta_{\mathcal{P}} = \{1, x, x^2\}$ y

$$\beta_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bases de $\mathcal{P}_2$ y $M_{22}(\mathbb{R})$ respectivamente. Calcule la matriz representante de T con respecto a estas bases.

- c) (5 pts) Calcule la dimensión del núcleo de T y la dimensión de la imagen de T .

11. Sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de las funciones en $\mathbb{R}$ dotado de la suma y multiplicación por escalar estándar.

- a) (2 pts) Pruebe que $\beta = \{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$ es una familia linealmente independiente en $\mathcal{F}$.

2.14. EJERCICIOS

- b) **(5 pts)** Pruebe que $\beta' = \{\cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$ es una familia linealmente independiente en $\mathcal{F}$.
- c) **(8 pts)** Sean $V = \langle \beta \rangle$, $W = \langle \beta' \rangle$ y D el operador derivada, es decir:

$$D : V \rightarrow W$$

$$f \mapsto Df = f'.$$

Calcule $M_{\beta, \beta'}(D)$ la matriz representante de D . Concluya que D es un isomorfismo, encuentre $M_{\beta, \beta'}(D)^{-1}$ y úsela para encontrar D^{-1} .

- d) **(5 pts)** Considere $\tilde{\beta} = \{\sin(x) + \sin(3x), \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x), \sin(2x) + \sin(3x)\}$. Muestre que $\tilde{\beta}$ forma una base para V .
- e) **(5 pts)** Calcule $M_{\tilde{\beta}, \beta'}(D)$.

12. Sea ℓ el espacio vectorial de sucesiones reales dotado de su suma y multiplicación por escalar estándar. Definimos las transformaciones lineales $R : \ell \rightarrow \ell$ y $L : \ell \rightarrow \ell$ para $x \in \ell$ como:

$$(Rx)_i = \begin{cases} x_{i-1} & i \geq 1 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

$$(Lx)_i = x_{i+1}$$

La traslación a la derecha y a la izquierda respectivamente.

- a) **(4 pts)** Sean $P = \{x \in \ell : x_{2k+1} = 0, k \geq 0\}$, $I = \{x \in \ell : x_{2k} = 0, k \geq 0\}$. Muestre que P e I son s.e.v. de ℓ .
- b) **(4 pts)** Calcule $R(P)$, $L(P)$ y $L(I)$.
- c) **(6 pts)** Calcule $\ker(R)$ e $\text{Im}(R)$. ¿Es R un isomorfismo?
- d) **(6 pts)** Calcule $\ker(L)$ e $\text{Im}(L)$. ¿Es L un isomorfismo?
13. Sea $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ la transformación lineal asociada a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) **(6 pts)** Calcule $\text{Im}(T)$.
- b) **(6 pts)** Calcule $\ker(T)$.
- c) **(8 pts)** Demuestre que $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ son espacios suplementarios.
14. Sean $M_{23}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×3 a coeficientes reales y $\mathcal{P}_2$ los polinomios reales de grado menor o igual a 2. Considere

$$U = \{A \in M_{23}(\mathbb{R}) : A_{11} = 0\}$$

$$T : M_{23}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a + (b + e)x + (c + f)x^2$$

2.14. EJERCICIOS

a) (2 pts) Demuestre que U es un subespacio vectorial de $M_{23}(\mathbb{R})$.

b) (2 pts) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) (2 pts) Calcule que $T(U)$.

d) (4 pts) Sean $\beta_{\mathcal{P}} = \{1, x, x^2\}$ y

$$\beta_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bases de $\mathcal{P}_2$ y $M_{23}(\mathbb{R})$ respectivamente. Calcule la matriz representante de T con respecto a estas bases.

15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal asociada a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (4 pts) Calcule $\text{Im}(T)$.

b) (1 pts) Calcule $\ker(T)$.

16. Demuestre que dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen igual dimensión.

Capítulo 3

Ortogonalidad y Geometría en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se estudiará un poco de geometría en $\mathbb{R}^n$ y en particular la noción de ortogonalidad.

3.1. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Comencemos por recordar una definición del capítulo 2.

Definición 1 (Producto interno de vectores). *Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$ definimos el producto punto entre ellos por:*

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

También denotaremos $a \cdot b$ por $\langle a, b \rangle$.

Ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 40 = 300.$$

Proposición 2. *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. (Simetría) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. (Bilinealidad) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$.

Demostración:



3.1. CONJUNTOS ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Definición 3 (Norma de un vector). *Dado un vector $a \in \mathbb{R}^n$ definimos su norma por:*

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Ejemplo II.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}.$$

Ejemplo III. *Consideremos $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. En este caso:*

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

gracias al Teorema de Pitágoras, sabemos que este número es igual a la longitud del segmento recto que une el origen del plano Cartesiano $(0, 0)$ con el punto de coordenadas (x, y) . Motivados por este hecho diremos que para $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ representa el tamaño del vector.

Proposición 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

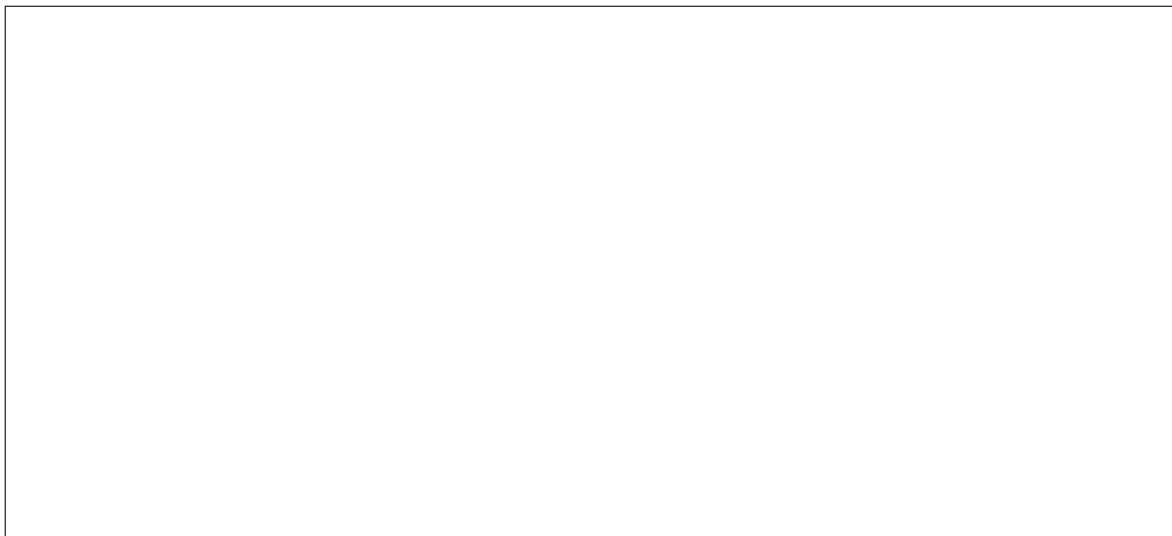
Demostración:



Proposición 5 (Propiedades de la norma). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:*

1. (Positividad) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. (Homogeneidad) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. (Desigualdad triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demostración:



Definición 6 (Vector normalizado). *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ diremos que está normalizado si $\|x\| = 1$.*

Ejemplo IV.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ 3/\sqrt{30} \\ 4/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right\|$$

es un vector normalizado.

Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, la suma de ellos se puede obtener con el método del paralelogramo, como se observa en la Figura 3.1.

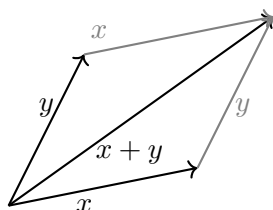


Figura 3.1: Método del paralelogramo para la suma de vectores. En gris los vectores trasladados.

Un cálculo directo nos muestra que $\|x+y\| = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2}$, en particular si $\langle x, y \rangle = 0$, observamos que se cumple el Teorema de Pitágoras y eso nos motiva a la siguiente definición:

Definición 7 (Vectores ortogonales). *Diremos que $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Ejemplo V. Los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales.

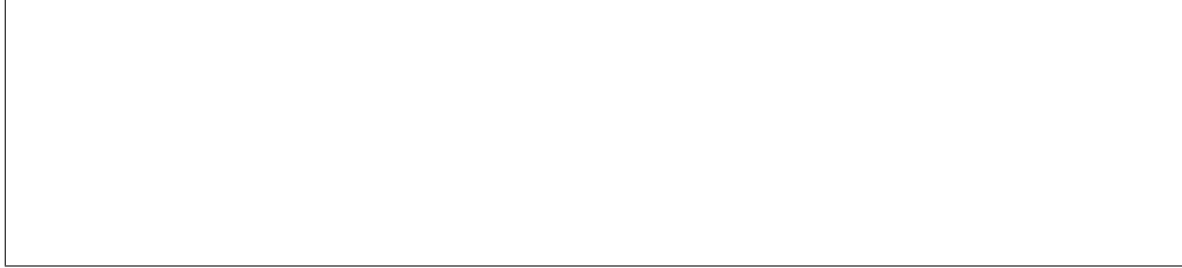
3.1. CONJUNTOS ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Definición 8 (Conjunto ortogonal y ortonormal). *Diremos que $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ forman un conjunto ortogonal si para todo par $i, j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Si además para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene $\|x_i\| = 1$, entonces el conjunto se dice ortonormal.*

Ejemplo VI. *Los vectores canónicos e_i , $i = 1, \dots, n$ de $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto ortonormal.*

Proposición 9. *Un conjunto ortogonal de vectores cuyos elementos son distintos de cero es linealmente independiente. En particular todo conjunto ortogonal de n vectores es base de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración:



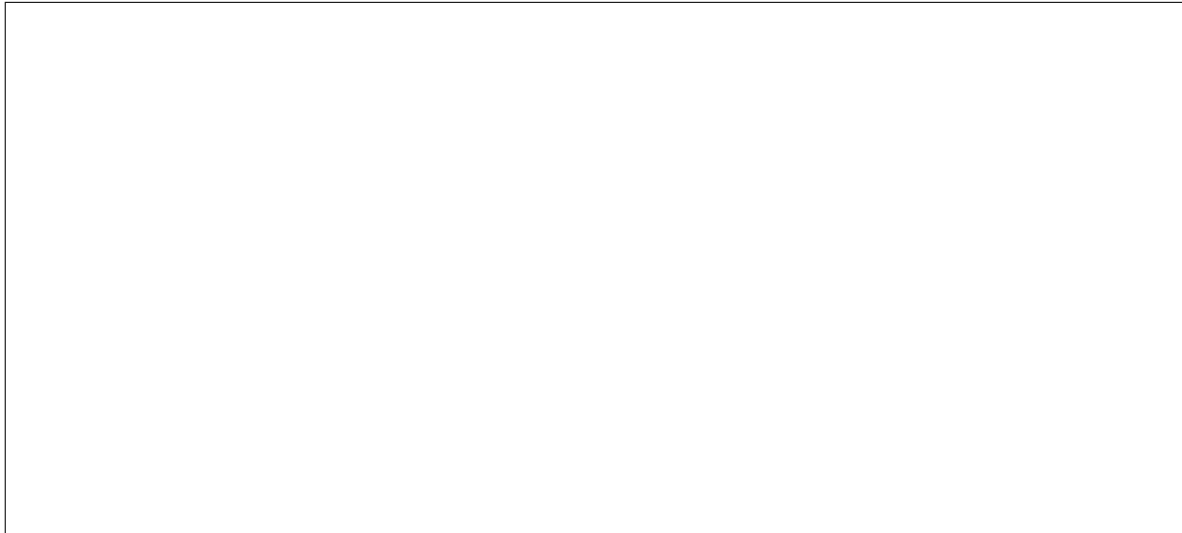
Proposición 10. *Sean $v_1, \dots, v_r$ vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definamos la proyección ortogonal de x en $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ por*

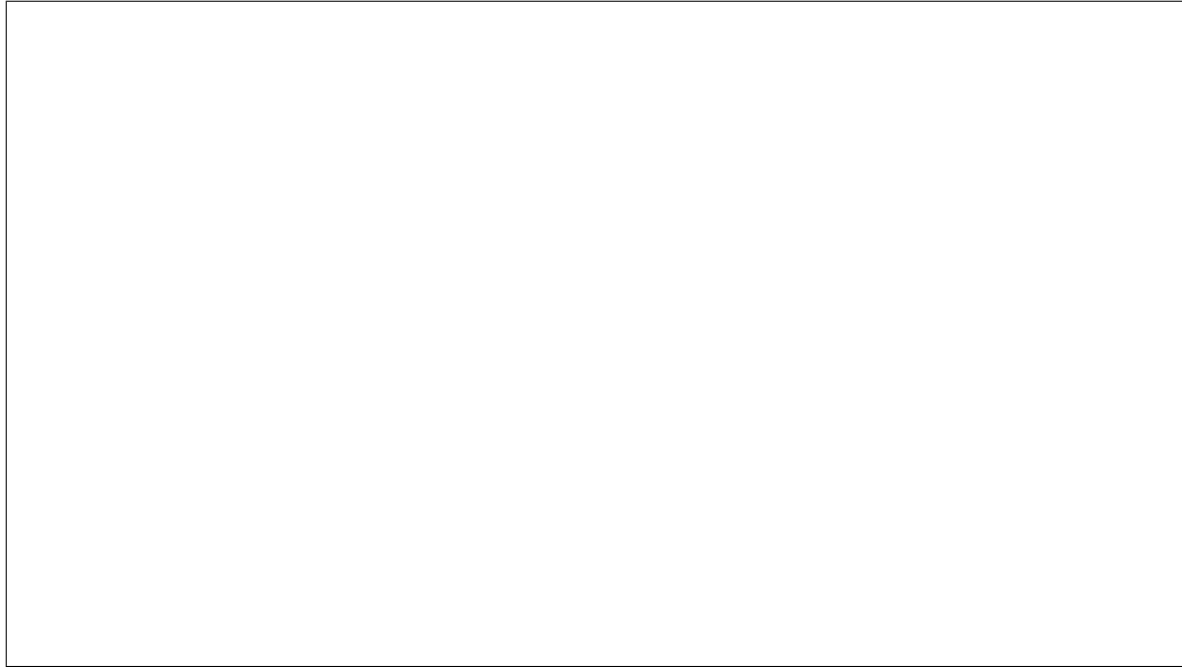
$$p = \sum_{j=1}^r \langle x, v_j \rangle v_j.$$

Entonces:

1. *Si $x \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, entonces $x = p$.*
2. *Si $x \notin \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, entonces $p \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, $x - p$ es ortogonal a todos los elementos de $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ y además $\|x - p\| \leq \|x - v\|$ para todo $v \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.*

Demostración:





3.2. Método de Gram-Schmidt

El Método de Gram-Schmidt es un algoritmo que nos permite construir a partir de un conjunto de vectores un nuevo conjunto de vectores ortonormales tales que ambos conjuntos generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Gracias a este algoritmo podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 11. Sea $\{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existen $v_1, \dots, v_r$ vectores ortonormales tales que

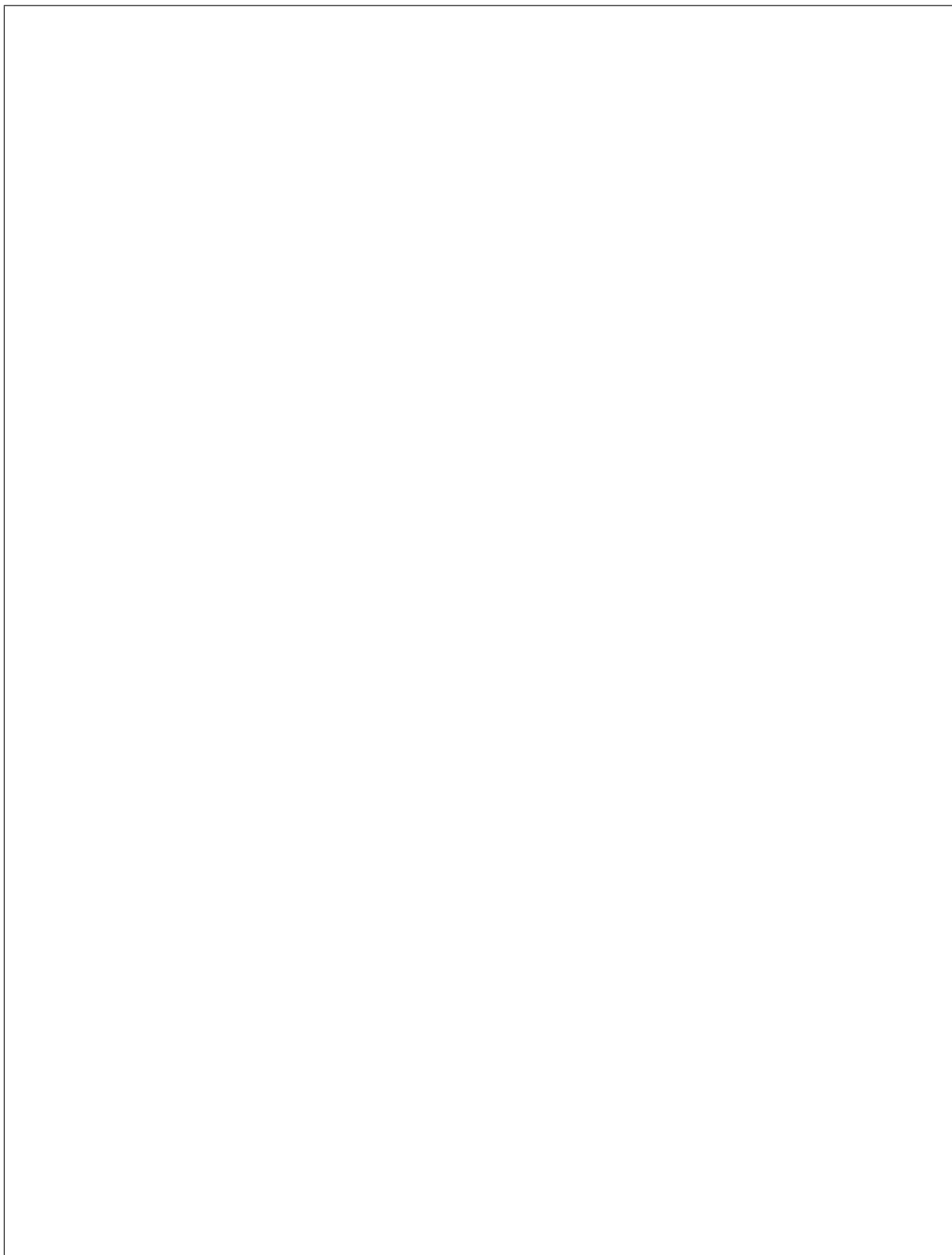
$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle.$$

Método de Gram-Schmidt: Para demostrar esta proposición lo que haremos es mostrar que la salida del siguiente algoritmo es exactamente la familia $v_1, \dots, v_r$.

1. Sea u_k el primer vector de la familia $u_1, \dots, u_m$ que es distinto de 0. Entonces $v_1 = u_k / \|u_k\|$.
2. Para $j = 1, \dots, m - k$:
 - a) Encontramos p_{j+1} la proyección ortogonal de u_{k+j} en $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$.
 - b) Calculamos $r_{j+1} = u_{k+j} - p_{j+1}$.
 - Si $r_{j+1} = 0$: Se pasa al siguiente j . (El vector u_{k+j} es combinación lineal de los anteriores, y por lo tanto no produce un nuevo vector ortogonal).
 - Si $r_{j+1} \neq 0$: Se define $v_{j+1} = r_{j+1} / \|r_{j+1}\|$.
 - c) Para terminar, como algunos índices no producen vectores v_j , volvemos a enumerar los vectores v_j para que queden correlativos.

3.2. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

Demostración:



3.2. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

Proposición 12 (Subespacio Ortogonal). *Sea U un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Sea*

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Entonces:

1. $U^\perp$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
2. $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

Demostración:



3.3. Resumen del capítulo

Conjuntos Ortogonales y Ortonormales

Definición 1 (Producto interno de vectores). Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$ definimos el producto punto entre ellos por:

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

También denotaremos $a \cdot b$ por $\langle a, b \rangle$.

Proposición 2. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. (Simetría) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. (Bilinealidad) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$.

Definición 3 (Norma de un vector). Dado un vector $a \in \mathbb{R}^n$ definimos su norma por:

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Proposición 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Proposición 5 (Propiedades de la norma). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces:

1. (Positividad) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. (Homogeneidad) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. (Desigualdad triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 6 (Vector normalizado). Dado $x \in \mathbb{R}^n$ diremos que está normalizado si $\|x\| = 1$.

Definición 7 (Vectores ortogonales). Diremos que $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.

Definición 8 (Conjunto ortogonal y ortonormal). Diremos que $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ forman un conjunto ortogonal si para todo par $i, j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Si además para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene $\|x_i\| = 1$, entonces el conjunto se dice ortonormal.

Proposición 9. Un conjunto ortogonal de vectores cuyos elementos son distintos de cero es linealmente independiente. En particular todo conjunto ortogonal de n vectores es base de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 10. Sean $v_1, \dots, v_r$ vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definamos la proyección ortogonal de x en $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ por

$$p = \sum_{j=1}^r \langle x, v_j \rangle v_j.$$

Entonces:

1. Si $x \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, entonces $x = p$.
2. Si $x \notin \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, entonces $p \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, $x - p$ es ortogonal a todos los elementos de $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ y además $\|x - p\| \leq \|x - v\|$ para todo $v \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Proposición 11. Sea $\{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existen $v_1, \dots, v_r$ vectores ortonormales tales que

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle.$$

Proposición 12 (Subespacio Ortogonal). Sea U un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Entonces:

1. $U^\perp$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.
2. $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.

3.4. Ejercicios

1. Determine cuales de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales. Normalice aquellos que lo sean.

a)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique se se satisface:

a) $AA^t = A^tA = I$.

b) Si $x \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|Ax\| = \|x\|$.

c) Si $x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. En particular, $\langle Ax, Ay \rangle = 0$ si y sólo si $\langle x, y \rangle = 0$.

3. Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, muestre que para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle.$$

Muestre además que si $A^tA = I$, entonces:

a) Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|Ax\| = \|x\|$.

b) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. En particular, $\langle Ax, Ay \rangle = 0$ si y sólo si $\langle x, y \rangle = 0$.

Capítulo 4

Valores y Vectores Propios

4.1. Matrices diagonalizables

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Supongamos que existe una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que

$$A = PDP^{-1}.$$

Tal descomposición tiene muchas aplicaciones en matemática y en particular nos permite calcular de manera fácil las potencias de A . En efecto,

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

y más en general

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

La pregunta natural es si se puede determinar bajo que condiciones existen las matrices D y P , y cómo se calculan.

Notemos que si $A = PDP^{-1}$, con $P = (v_1 | \dots | v_n)$ y $D_{ii} = \lambda_i$, entonces:

$$\begin{aligned} Av_i &= PDP^{-1}v_i \\ &= PDe_i \\ &= P(\lambda_i e_i) \\ &= \lambda_i v_i, \end{aligned}$$

así, las columnas de P satisfacen $Av_i = \lambda_i v_i$. Notemos que para cada $i = 1, \dots, n$, tanto λ_i , como v_i son desconocidos y por lo tanto tenemos un sistema no lineal de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. Sin embargo, si logramos encontrar n escalares y n vectores linealmente independientes que satisfagan estas ecuaciones, entonces podremos descomponer A de la forma deseada.

Definición 1. [Valor y vector propio] Diremos que λ es un valor propio (o característico) de A si existe un vector $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v,$$

a dicho v lo llamaremos vector propio (o característico) de A .

Ejemplo I. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene a $(1, 1)^t$ como vector propio con valor propio igual a 2, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0,$$

es decir, un valor propio de A es un escalar λ tal que $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Como $A - \lambda I$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ si y sólo si $A - \lambda I$ no es invertible, y sabemos que esto es equivalente a

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definición 2. [Polinomio Característico] Sea $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Se puede demostrar que p es un polinomio de grado n . A p_A le llamaremos polinomio característico de A . Notemos que las raíces de p_A son los valores propios de A .

Ejemplo II. *El polinomio característico de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

está dado por

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Entonces, sus valores propios son 0 y 2.

Ejemplo III. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico en este caso está dado por

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

y entonces, los valores propios de A son i y $-i$. Esto nos dice que A no es diagonalizable como elemento de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Sin embargo, si permitimos vectores con valores complejos entonces $(1, i)^t$ es un vector propio asociado a i , mientras que $(1, -i)^t$ es un vector propio asociado a $-i$.

Definición 3. [Matriz Diagonalizable] Diremos que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A .

Ejemplo IV. Sigamos estudiando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo anterior vimos que los valores propios de la matriz son 0 y 2, y antes que eso vimos que $(1, 1)^t$ es el vector propio asociado al valor propio 2. Para encontrar el vector propio asociado a 0, buscamos las soluciones no triviales del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que el vector $(1, -1)^t$ resuelve este sistema. , pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $(1, -1)^t$ es el vector propio de la matriz asociado al valor propio 0. Como los vectores $(1, 1)^t$ y $(1, -1)^t$ son una base de $\mathbb{R}^2$, se sigue que A es diagonalizable.

Algoritmo de Diagonalización: Gracias a lo expuesto antes, dada una matriz A diagonalizable, para encontrar su descomposición PDP^{-1} procedemos de la siguiente manera:

1. Se calcula p_A .
2. Se encuentran las raíces de p_A : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.
3. Para $i = 1, \dots, r$ se encuentra una base $\{v_1^i, \dots, v_{s_i}^i\}$ de $\ker(A - \lambda_i I)$.

Sea

$$S = \{v_1^1, \dots, v_{s_1}^1\} \cup \dots \cup \{v_1^r, \dots, v_{s_r}^r\},$$

Si S es base de $\mathbb{R}^n$, entonces A es diagonalizable y los elementos de S son las columnas de la matriz P , mientras que la matriz D está dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r I_{s_r} \end{pmatrix},$$

con I_{s_i} la identidad de tamaño s_i .

Si S no es base de $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz A no es diagonalizable.

Ejercicio I. Aplique el algoritmo de diagonalización a las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

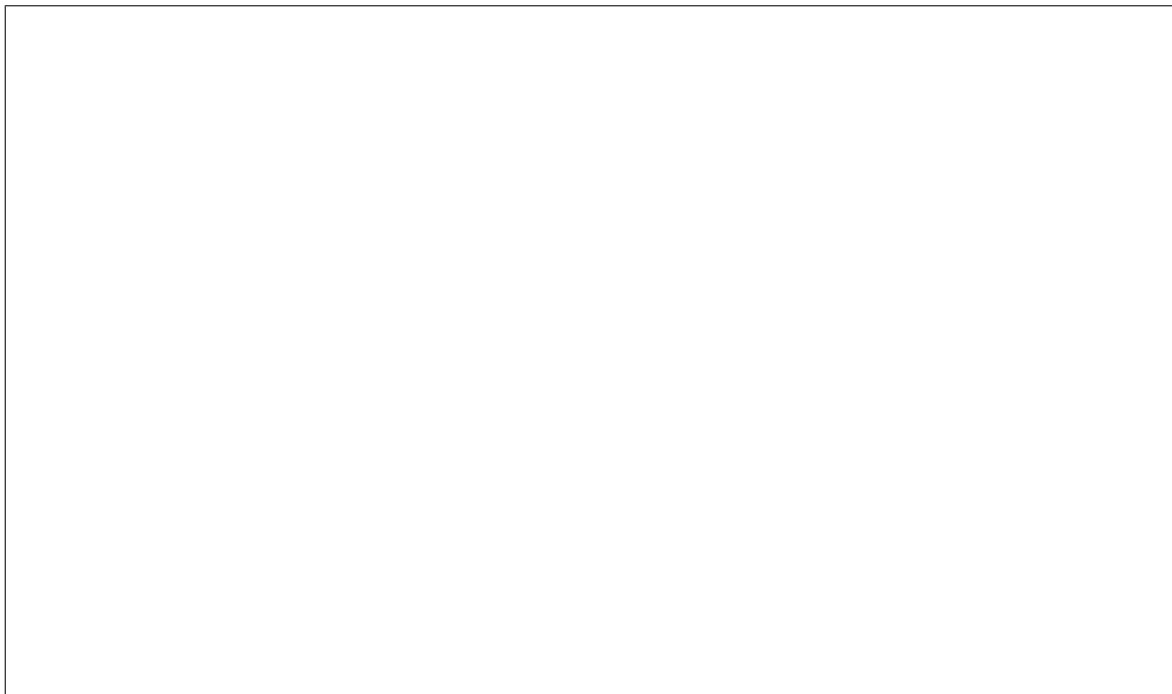
4.1. MATRICES DIAGONALIZABLES

Solución:

4.1. MATRICES DIAGONALIZABLES

Teorema 4. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ son valores propios de A distintos y $v_i, i = 1, \dots, k$ son vectores propios tales que $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ son linealmente independientes.

Demostración:



Corolario 5. Si p_A tiene n raíces reales distintas, entonces A es diagonalizable.

Demostración:



Definición 6. [Suma directa de subespacios vectoriales] Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $W_1, \dots, W_k$ subespacios vectoriales de V . Diremos que el subespacio vectorial $W := W_1 + \dots + W_k$ es la suma directa de los s.e.v. W_k , lo que denotaremos como

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k,$$

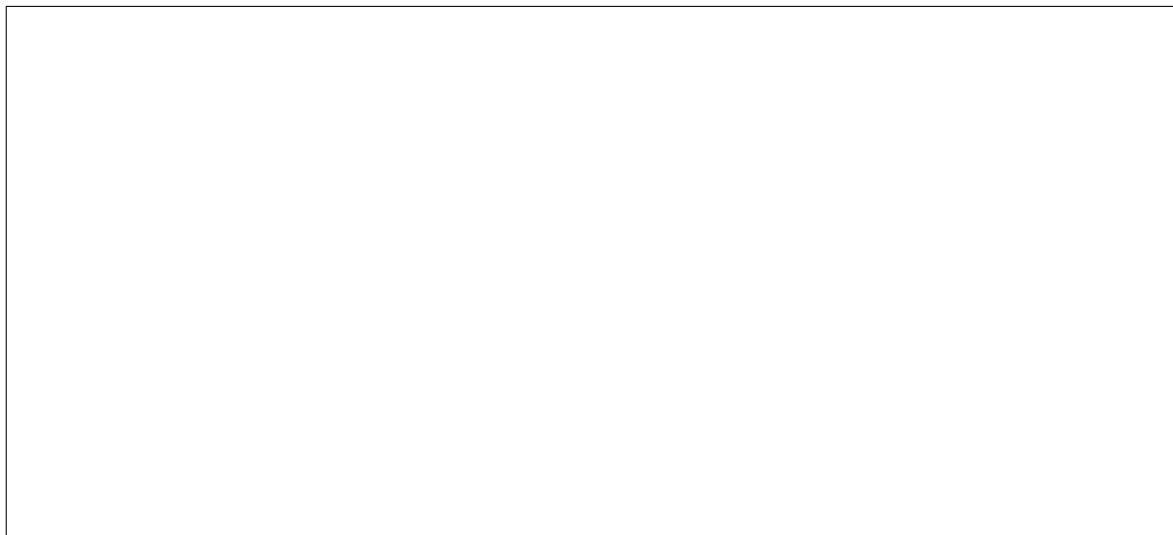
si para todo elemento $w \in W$ existe una única descomposición de la forma

$$w = w_1 + \dots + w_k, \quad w_k \in W_k.$$

4.1. MATRICES DIAGONALIZABLES

Proposición 7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $W_1, \dots, W_k$ subespacios vectoriales de V en suma directa. Entonces la base de $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, está dada por la concatenación de las bases para cada W_j , $j = 1, \dots, k$.

Demostración:



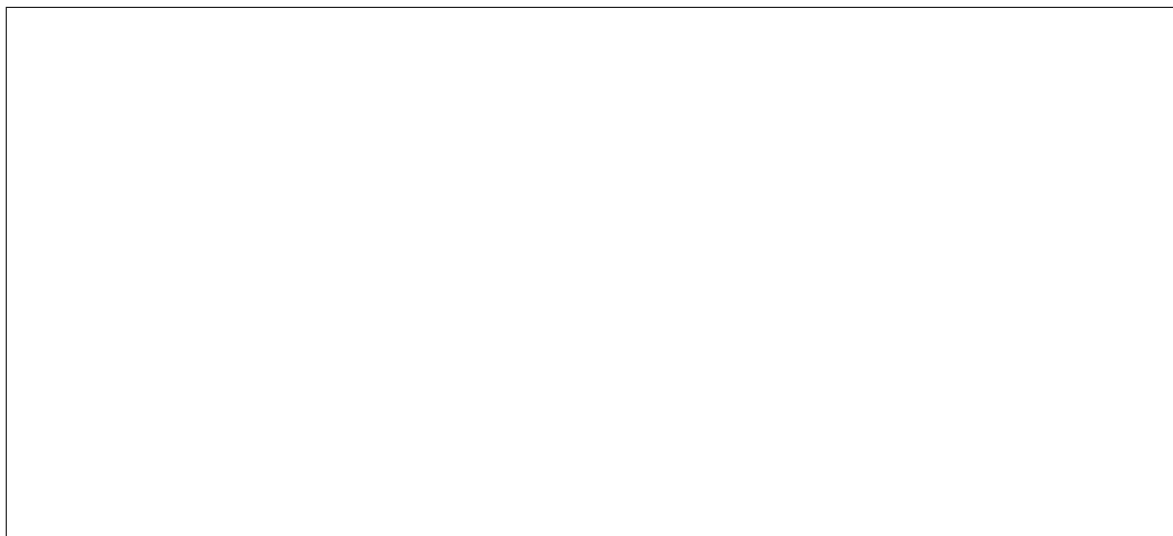
Definición 8. [Subespacio Propio] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos subespacio propio, que denotaremos por W_λ al núcleo de $(A - \lambda I)$, es decir

$$W_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Teorema 9. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ son valores propios de A distintos. Entonces los espacios propios asociados a cada valor propio están en suma directa. Más aún, A es diagonalizable, si y solamente si

$$\mathbb{R}^n = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}.$$

Demostración:

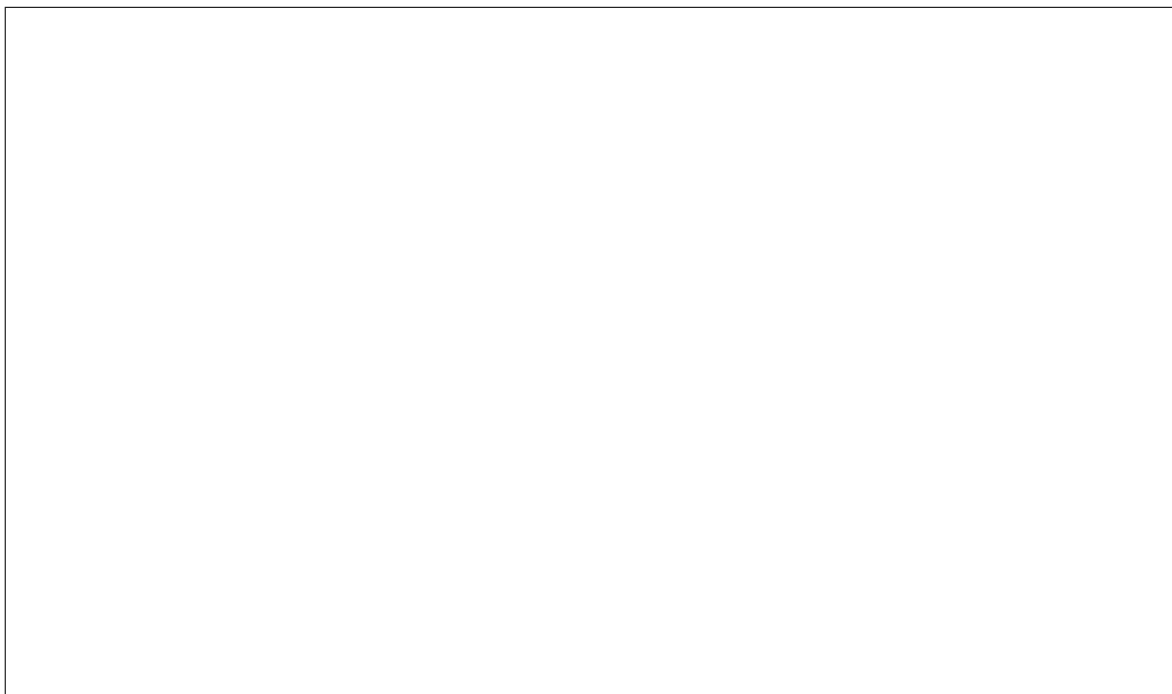


4.1. MATRICES DIAGONALIZABLES

Definición 10. [Multiplicidad Geométrica] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos multiplicidad geométrica de λ , que denotaremos $\gamma_A(\lambda)$, a la dimensión de W_λ .

Teorema 11. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si la suma de las multiplicidades geométricas de sus valores propios es igual a n .

Demostración:



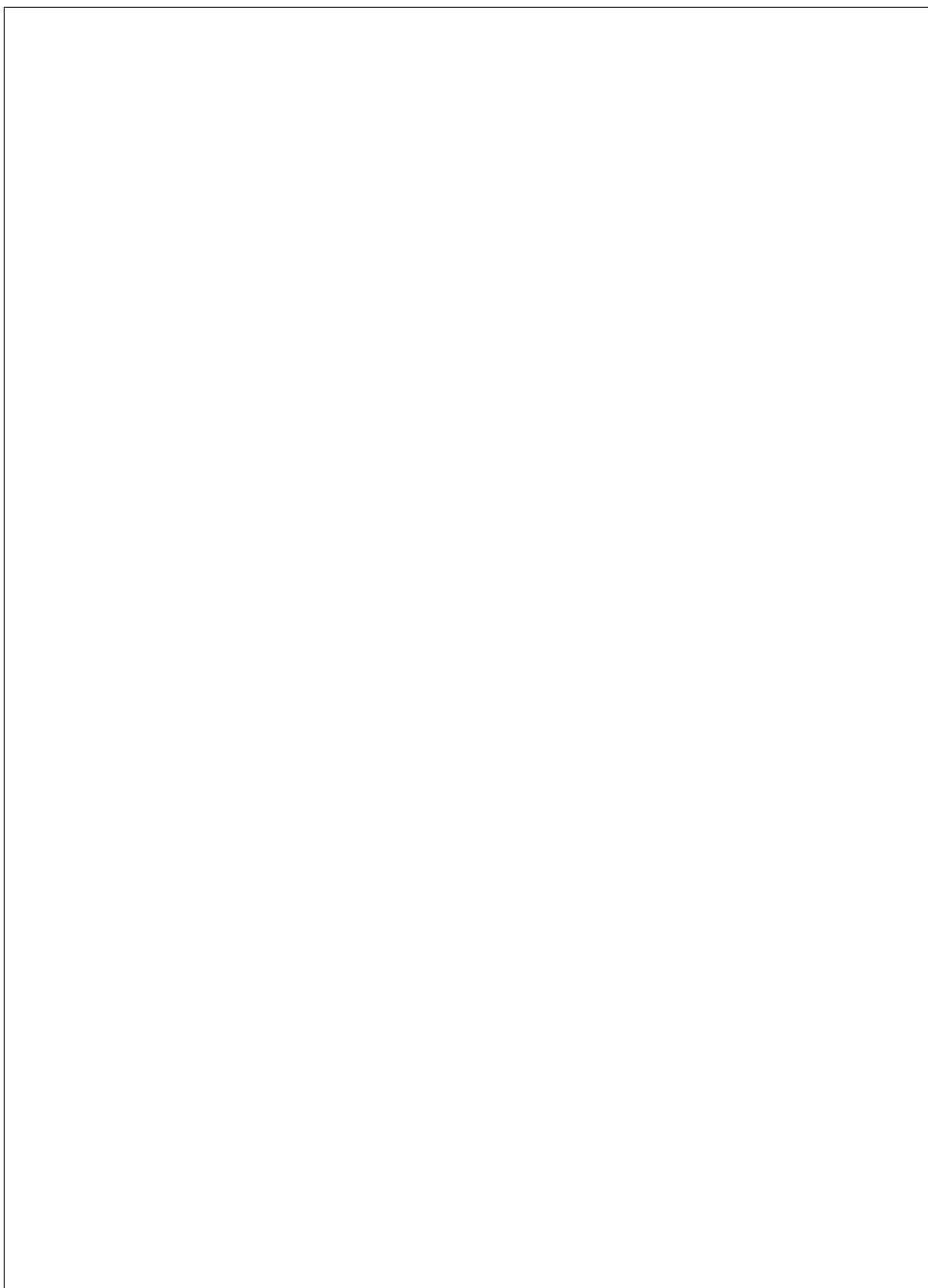
Definición 12. [Multiplicidad Algebraica] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos multiplicidad algebraica de λ , que denotaremos $\alpha_A(\lambda)$, a la potencia más alta de $(x - \lambda)$ que divide a $p_A(x)$.

Proposición 13. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Entonces:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n.$$

Demostración:





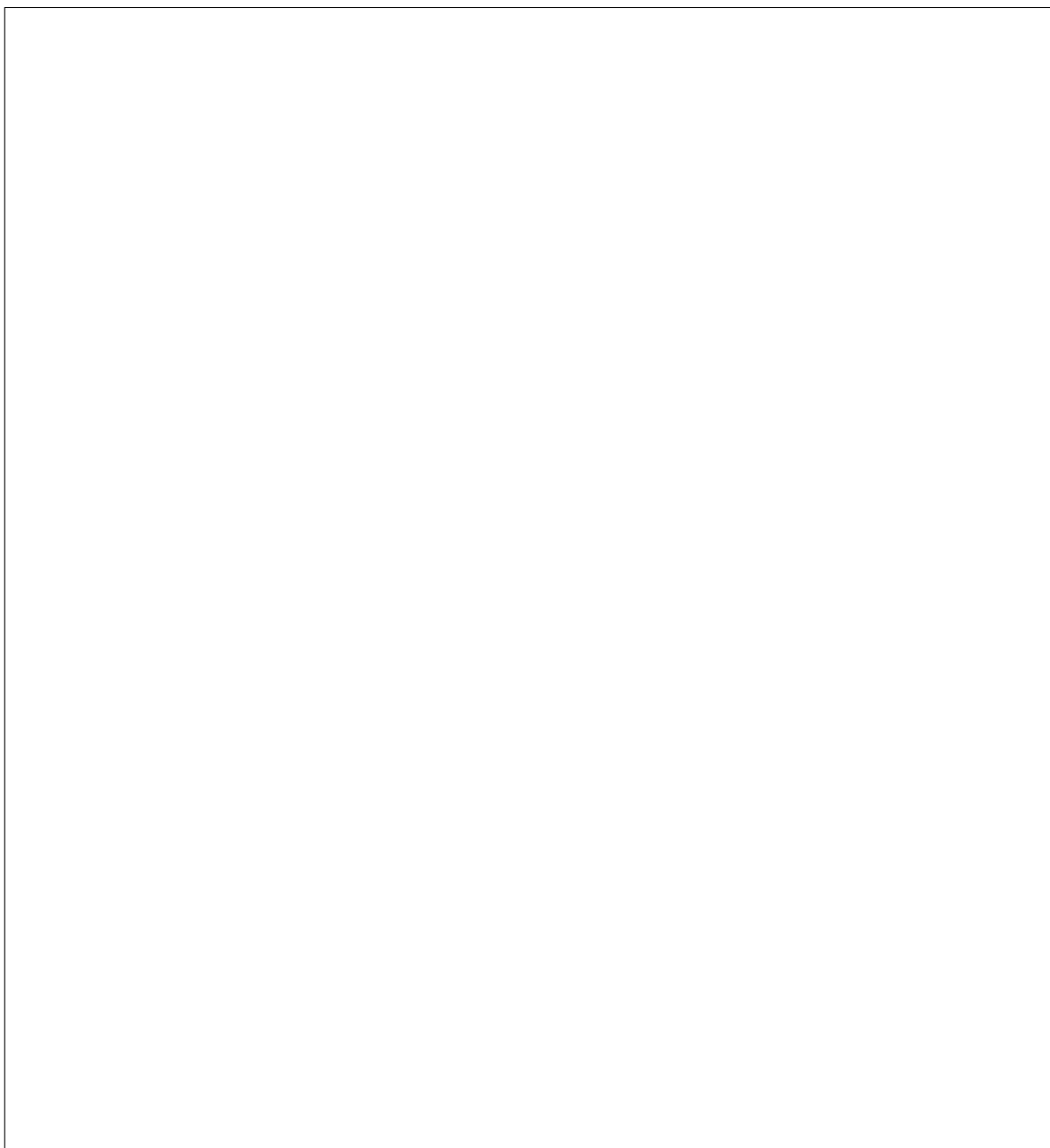
4.1. MATRICES DIAGONALIZABLES

Corolario 14. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y p_A su polinomio característico. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si p_A se factoriza completamente en $\mathbb{R}$ en factores lineales. Es decir:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)},$$

y además, para todo valor propio λ de A , $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$.

Demostración:



4.2. Diagonalización de una Matriz Simétrica

En general, no se puede saber a priori si una matriz es diagonalizable. Sin embargo, en esta sección veremos que existe una familia de matrices que siempre se pueden diagonalizar: las matrices simétricas.

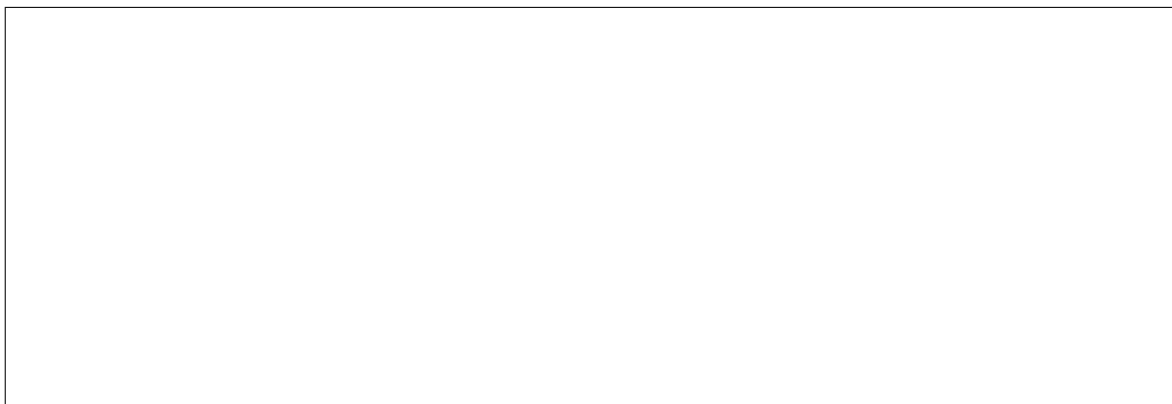
Proposición 15. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Si λ y μ son raíces de su polinomio característico (reales o complejas) y u, v son vectores (con componentes eventualmente complejas) que satisfacen:*

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v,$$

entonces se tiene que

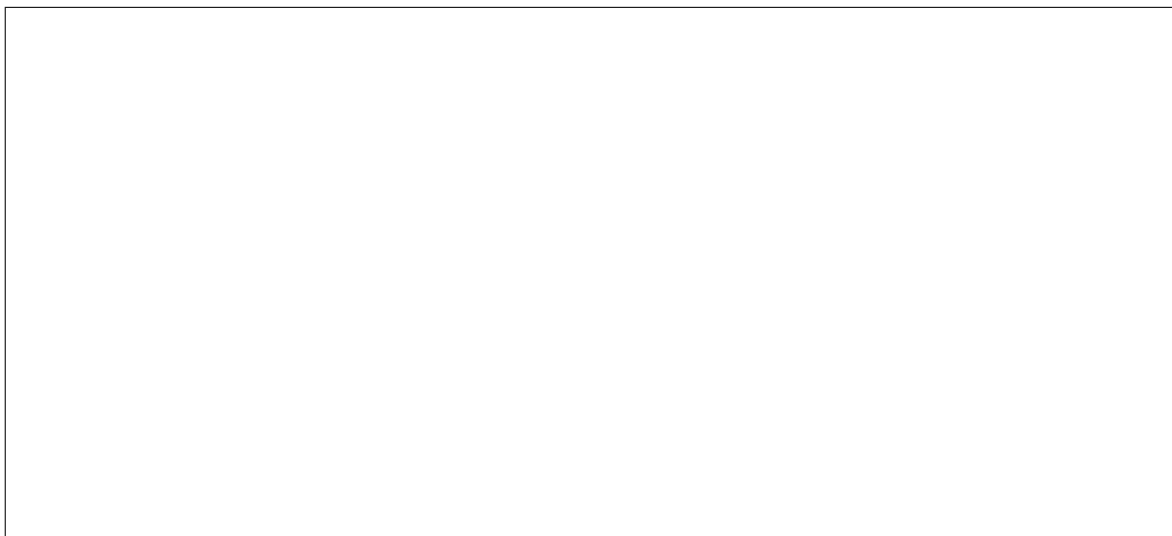
$$(\lambda - \mu)u^t \cdot v = 0.$$

Demostración:



Teorema 16. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces todos sus valores propios son reales.*

Demostración:



4.2. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

Corolario 17. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre si.

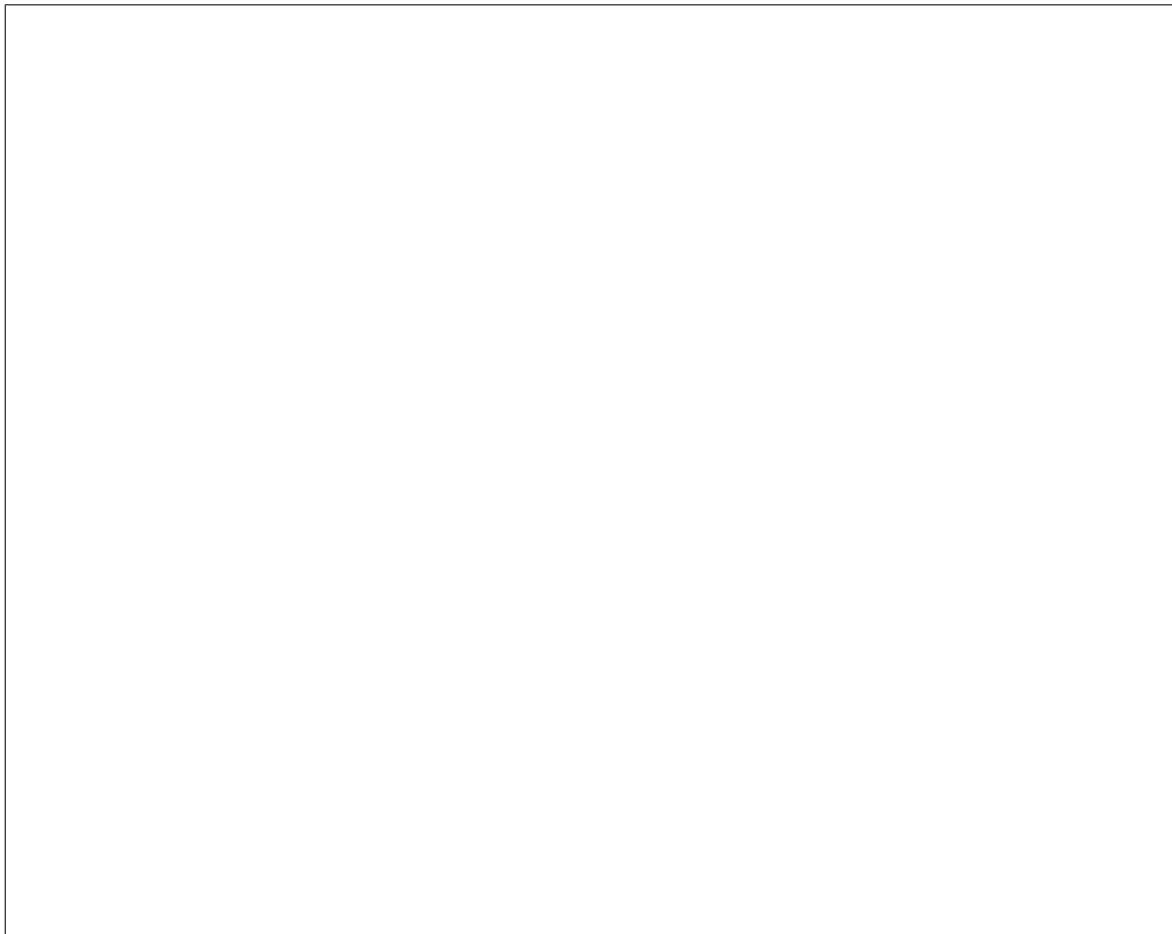
Demostración:

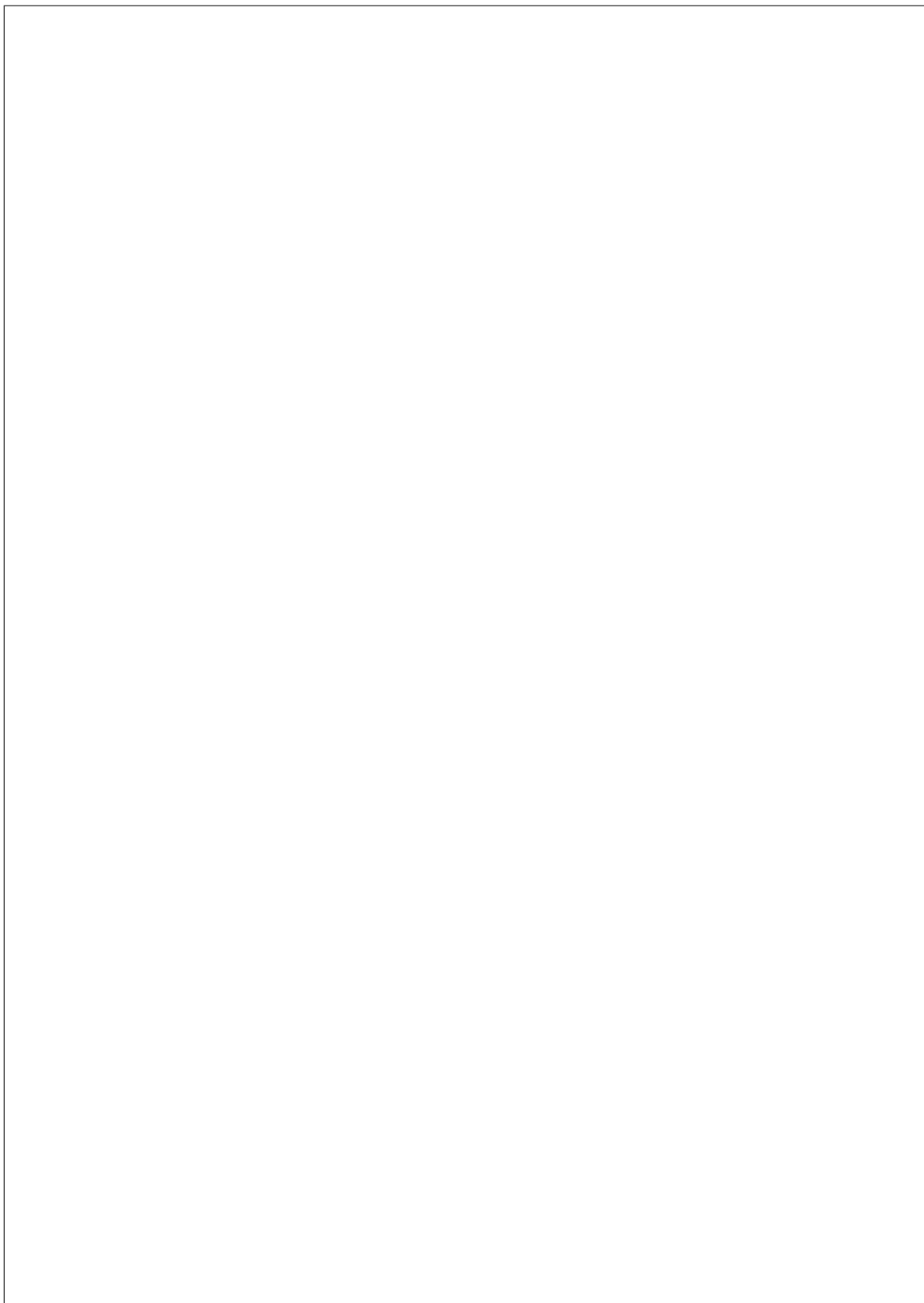


Antes de demostrar el teorema principal de la sección, probaremos un lema técnico que necesitaremos:

Lema 18. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < \dim(V) < n$. Si $AV \subset V$, entonces existe $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$.

Demostración:



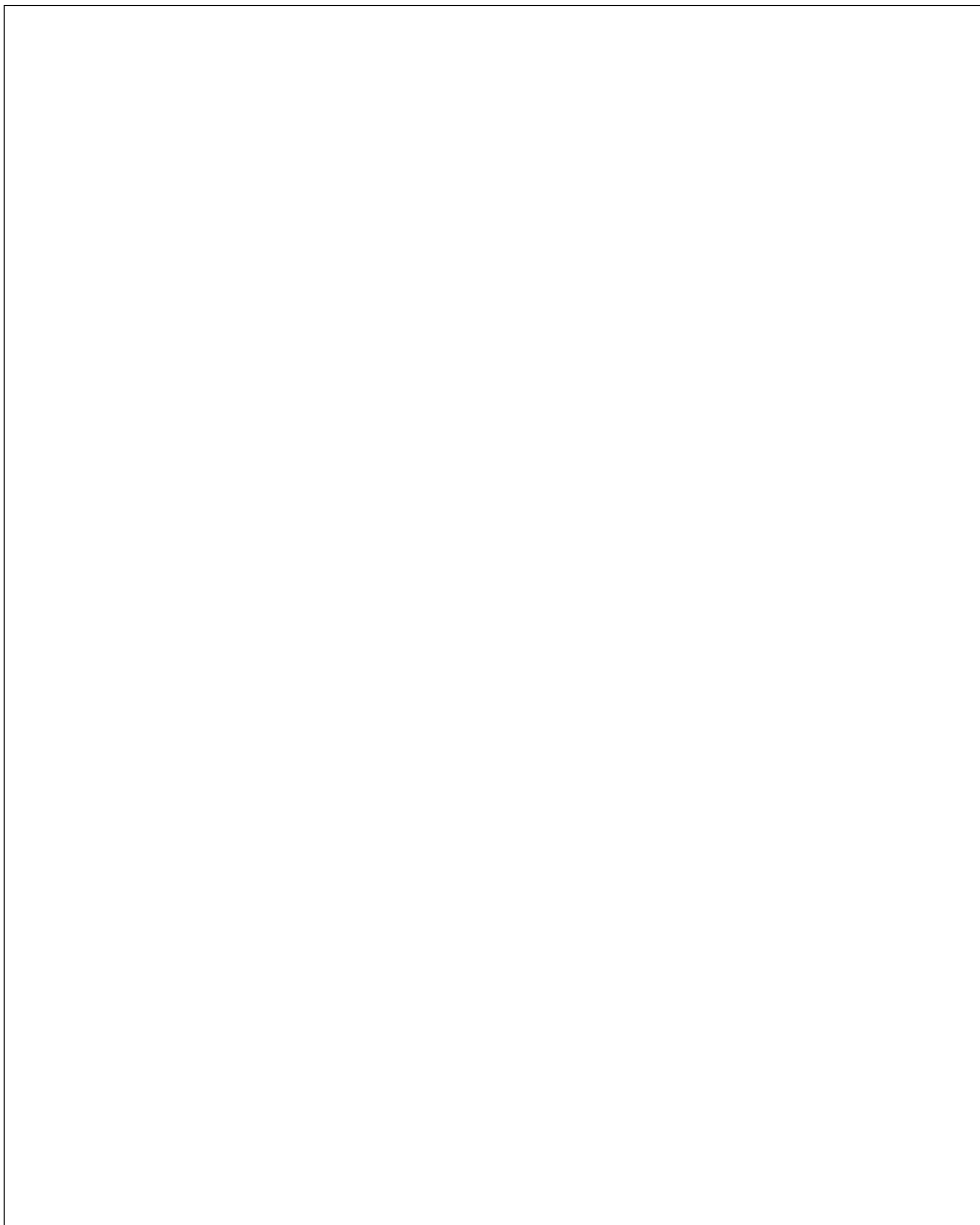


4.2. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

Teorema 19. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios A , y entonces

$$A = PDP^t.$$

Demostración:



4.3. Resumen del capítulo

Definición 1. [Valor y vector propio] Diremos que λ es un valor propio (o característico) de A si existe un vector $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v,$$

a dicho v lo llamaremos vector propio (o característico) de A .

Definición 2. [Polinomio Característico] Sea $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Se puede demostrar que p es un polinomio de grado n . A p_A le llamaremos polinomio característico de A . Notemos que las raíces de p_A son los valores propios de A .

Definición 3. [Matriz Diagonalizable] Diremos que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A .

Teorema 4. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ son valores propios de A distintos y $v_i, i = 1, \dots, k$ son vectores propios tales que $Av_i = \lambda_i v_i$, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ son linealmente independientes.

Corolario 5. Si p_A tiene n raíces reales distintas, entonces A es diagonalizable.

Definición 6. [Suma directa de subespacios vectoriales] Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $W_1, \dots, W_k$ subespacios vectoriales de V . Diremos que el subespacio vectorial $W := W_1 + \dots + W_k$ es la suma directa de los s.e.v. W_k , lo que denotaremos como

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k,$$

si para todo elemento $w \in W$ existe una única descomposición de la forma

$$w = w_1 + \dots + w_k, \quad w_k \in W_k.$$

Proposición 7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $W_1, \dots, W_k$ subespacios vectoriales de V en suma directa. Entonces la base de $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, está

dada por la concatenación de las bases para cada $W_j, j = 1, \dots, k$.

Definición 8. [Subespacio Propio] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos subespacio propio, que denotaremos por W_λ al núcleo de $(A - \lambda I)$, es decir

$$W_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

Teorema 9. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ son valores propios de A distintos. Entonces los espacios propios asociados a cada valor propio están en suma directa. Más aún, A es diagonalizable, si y solamente si

$$\mathbb{R}^n = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}.$$

Definición 10. [Multiplicidad Geométrica] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos multiplicidad geométrica de λ , que denotaremos $\gamma_A(\lambda)$, a la dimensión de W_λ .

Teorema 11. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si la suma de las multiplicidades geométricas de sus valores propios es igual a n .

Definición 12. [Multiplicidad Algebraica] Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Llamaremos multiplicidad algebraica de λ , que denotaremos $\alpha_A(\lambda)$, a la potencia más alta de $(x - \lambda)$ que divide a $p_A(x)$.

Proposición 13. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio de A . Entonces:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n.$$

Corolario 14. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y p_A su polinomio característico. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si p_A se factoriza completamente en $\mathbb{R}$ en factores lineales. Es decir:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)},$$

y además, para todo valor propio λ de A , $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$.

Proposición 15. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Si λ y μ son raíces de su polinomio característico (reales o complejas) y u, v son vectores (con componentes eventualmente complejas) que satisfacen:

$$Au = \lambda u, \quad Av = \mu v,$$

entonces se tiene que

$$(\lambda - \mu)u^t \cdot v = 0.$$

Teorema 16. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces todos sus valores propios son reales.

Corolario 17. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí.

Lema 18. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < \dim(V) < n$. Si $AV \subset V$, entonces existe $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$.

Teorema 19. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A es simétrica, entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios A , y entonces

$$A = PDP^t.$$

4.4. Ejercicios

1. Diagonalice, si es posible, las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Calcule A^{10} .

3. Diagonalice las siguientes matrices simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea A una matriz de $n \times n$ cuyo polinomio característico está dado por $p_A(\lambda) = (\lambda - c)^n$. Demuestre que A es diagonalizable si y sólo si $A = cI_n$, con I_n la matriz identidad.
5. Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$ con valores propios distintos. Demuestre que entonces $AB = BA$ si y sólo si, A y B tienen los mismos vectores propios.
6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) **(5 pts.)** Encuentre el polinomio característico de A .
- b) **(5 pts.)** Muestre que A tiene sólo dos valores propios $\lambda_+ > 0$ y $\lambda_- < 0$, tales que $\lambda_+ + \lambda_- = 0$.
- c) **(10 pts.)** Encuentre los vectores propios de A .

4.4. EJERCICIOS

- d) (5 pts.) Encuentre una base ortonormal para W_{λ_+} el espacio propio asociado a λ_+ .
- e) (5 pts.) Escriba la descomposición de A como $A = PDP^{-1}$.
- f) (5 pts.) Calcule la proyección de $x \in \mathbb{R}^3$ en W_{λ_+} .
7. a) (5 pts.) Sea A una matriz diagonalizable tal que $A = PDP^{-1}$. Pruebe por inducción que para todo $n \geq 1$:

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

- b) (20 pts.) Sea

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

utilice la propiedad probada en la parte anterior para calcular B^5 .

Apéndices

Apéndice A

Conjuntos y Funciones

Definición 1 (Conjunto). Por **conjunto** entenderemos a una colección de objetos, previamente definidos y diferenciables entre sí, a los que llamaremos **elementos**.

Ejemplo V. Son conjuntos: $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{\text{Todos los planetas del sistema solar}\}$.

Observación XIII. Los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas: A, B, C , etc. Mientras que los elementos los denotaremos por letras minúsculas: a, b, c , etc.

Un conjunto se puede describir por extensión, es decir listando todos sus elementos: $\{a, b, c\}$. O por comprensión, es decir enunciando una propiedad que caracteriza a cada uno de sus elementos: $\{\text{Todos los planetas del sistema solar}\}$.

Ejemplo VI. Los siguientes corresponden a ejemplos de conjuntos numéricos:

1. El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$, que denotaremos $\mathbb{N}$.
2. El conjunto de los números enteros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, que denotaremos $\mathbb{Z}$.
3. El conjunto de los números racionales $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ que denotaremos $\mathbb{Q}$.
4. El conjunto de los números reales, que denotaremos $\mathbb{R}$.

Definición 2 (Igualdad de Conjuntos). Dados dos conjuntos A y B diremos que son iguales si contienen los mismos elementos. Es decir:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x \in A)x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge ((\forall x \in B)x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Ejemplo VII. El conjunto $\mathbb{N}$ y el conjunto $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ son iguales.

Definición 3 (Conjunto Vacío). El conjunto vacío, que denotamos $\emptyset$, corresponde al conjunto que no contiene ningún elemento.

En muchas ocasiones, todos los conjuntos con los que se desea trabajar son subconjuntos de un conjunto más grande al que se le suele llamar universo. En tal caso, se puede introducir la noción de complemento de un conjunto.

Definición 4 (Inclusión). Dados dos conjuntos A y B , diremos que A está incluido en B , lo que denotamos por $A \subset B$ todos los elementos de A , están también en B . Es decir:

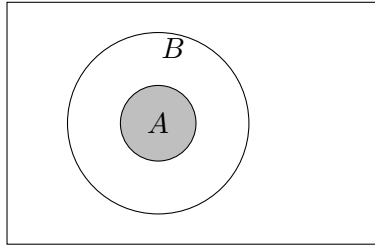


Figura A.1: Diagrama de Venn para la inclusión: $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow ((\forall x \in A)x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ejemplo VIII. Se tiene la siguiente cadena de inclusiones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposición 5. Sean A, B conjuntos. Entonces:

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow A = B.$$

Demostración:



Proposición 6. Sean A, B, C conjuntos. Entonces:

1. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$.
2. $A \subset A$.
3. $\emptyset \subset A$.
4. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

Demostración:



Definición 7 (Las partes de un conjunto). Dado un conjunto A , llamaremos **conjunto de las partes de A** , o simplemente **las partes de A** , al conjunto que reúne a todos los subconjuntos de A . Se puede denotar por $\mathcal{P}_A$ o por 2^A .

Ejemplo IX. Sea $A = \{a, b, c\}$, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

A.1. Operaciones con Conjuntos

Definición 8 (Unión). *Dados dos conjuntos A y B , la unión de ellos, denotada como $A \cup B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están al menos en uno de los dos conjuntos. Es decir:*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

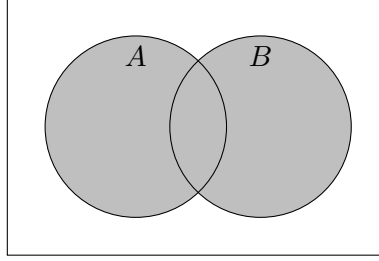


Figura A.2: Diagrama de Venn para la unión de dos conjuntos.

Ejemplo X. $\{a, b, c\} \cup \{e, d, f\} = \{a, b, c, e, d, f\}$.

Definición 9 (Intersección). *Dados dos conjuntos A y B , la intersección de ellos, denotada como $A \cap B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos. Es decir:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

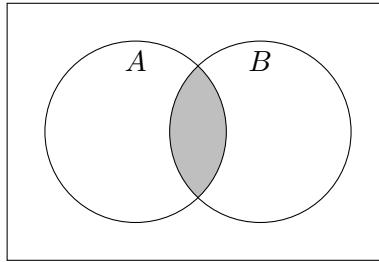


Figura A.3: Diagrama de Venn para la intersección de dos conjuntos.

Ejemplo XI. $\{a, b, c\} \cap \{e, d, f\} = \emptyset$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\{a, b, c\} \cap \{a, e, g, f\} = \{a\}$.

Proposición 10. *Sean A, B, C conjuntos. Entonces:*

1. $A \cap B = B \cap A$.
 $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

A.1. OPERACIONES CON CONJUNTOS

$$3. (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$4. A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Demostración:

Ejercicio I. Sea A un conjunto incluido en un universo U . Demuestre que:

$$1. A \cup A = A.$$

$$3. A \cup \emptyset = A.$$

$$5. A \cup U = U.$$

$$2. A \cap A = A.$$

$$4. A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$6. A \cap U = A.$$

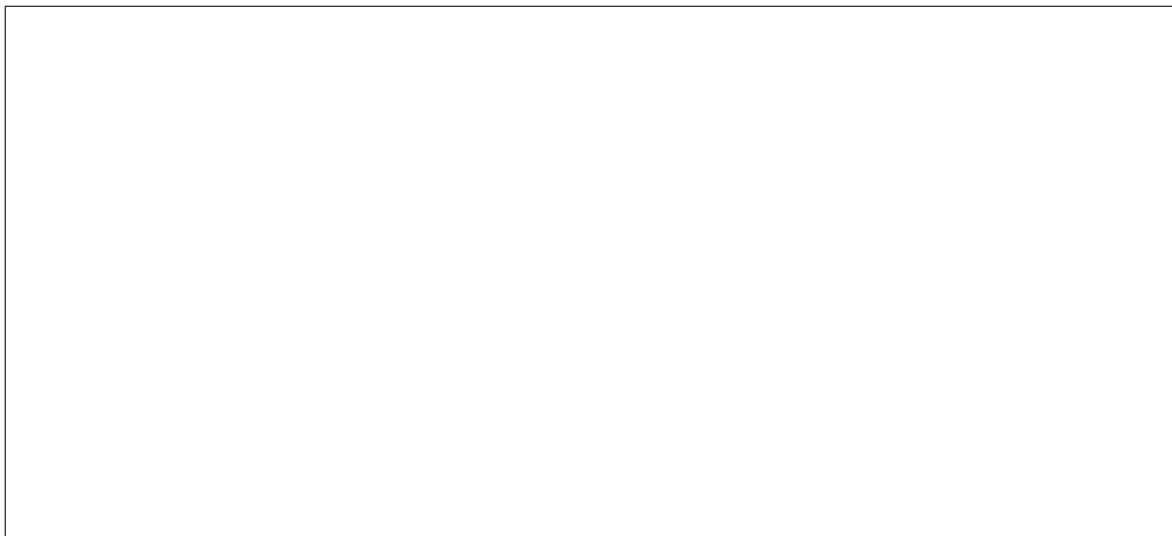
Solución:

Ejercicio II. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que:

$$1. A \subset C \text{ y } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$$

$$2. A \subset B \text{ y } A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C.$$

Solución:



Definición 11 (Diferencia). *Dados dos conjuntos A y B , la diferencia de A menos B , denotada como $A \setminus B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en A , pero no están en B . Es decir:*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

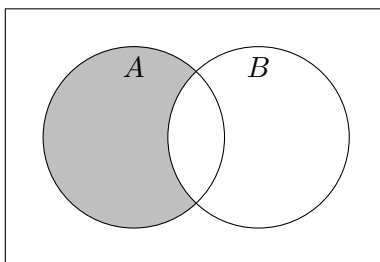


Figura A.4: Diagrama de Venn para la diferencia de dos conjuntos.

Ejemplo XII. $\{a, b, c\} \setminus \{e, d, f\} = \{a, b, c\}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\} \setminus \{a, e, g, f\} = \{b, c\}$.

Definición 12 (Complemento). *Dado un conjunto universo U y un conjunto $A \subset U$, el complemento de A , denotado como A^c , consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que están en U , pero no están en A . Es decir:*

$$A^c = U \setminus A.$$

En el caso de que el conjunto universo se infiere del contexto, se suele escribir $A^c = \{x \notin A\}$.

Ejemplo XIII. Si consideramos como universo el alfabeto latino, $\{\text{consonantes}\}^c = \{a, e, i, o, u\}$.

Proposición 13. Sean A, B conjuntos. Entonces:

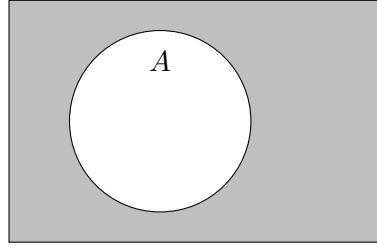


Figura A.5: Diagrama de Venn para el complemento de un conjunto.

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = U$.
 $A \cap A^c = \emptyset$.

Demostración:



Definición 14 (Diferencia Simétrica). *Dados dos conjuntos A y B , la diferencia simétrica entre A y B , denotada como $A \Delta B$, consiste en el conjunto que contiene todos los elementos que: están en A , pero no están en B , o bien, están en B , pero no están en A . Es decir:*

$$A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Ejemplo XIV. $\mathbb{Z} \Delta \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1\}$, $\{a, b, c\} \Delta \{a, e, g, f\} = \{b, c, e, g, f\}$.

Definición 15 (Producto Cruz). *Dados dos conjuntos A y B , el producto cruz entre ellos, denotado como $A \times B$, consiste en el conjunto de todos los **pares ordenados** (a, b) que se pueden construir considerando $a \in A$ y $b \in B$. Es decir*

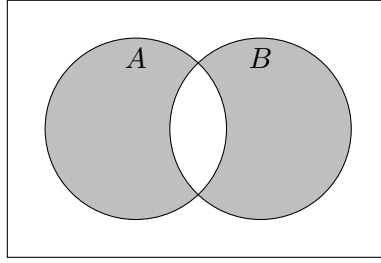


Figura A.6: Diagrama de Venn para la diferencia simétrica de dos conjuntos.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, x \in B\}.$$

Ejemplo XV. $\{0, 1\} \times \{a, b, c\} = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}.$

Operaciones con una cantidad arbitraria de conjuntos

Si bien las operaciones de conjuntos se definen de forma binaria, la unión y la intersección se pueden definir para una cantidad cualquiera, incluso infinita, de conjuntos. En efecto, sea I un conjunto cualquiera, tal que para todo $i \in I$, A_i es un conjunto. Se define entonces:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a : (\exists i \in I) a \in A_i\},$$

mientras que

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a : (\forall i \in I) a \in A_i\}.$$

Por otro lado, el producto cruz se puede definir entre una cantidad finita de conjuntos $A_1, \dots, A_n$, como el conjunto de todas las listas ordenadas de tamaño n tales que el i -ésimo elemento pertenece a A_i . Es decir:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Formalmente, $A_1 \times \dots \times A_n$ se puede definir inductivamente para $n \geq 2$ como

$$A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

A.2. Funciones

Definición 16 (Función). Sean A, B conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$, corresponde a un subconjunto de $A \times B$ que satisface:

$$(\forall a \in A) (\exists b \in B) (a, b) \in f.$$

$$((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c.$$

En palabras, a cada elemento de A , f asocia a lo más un elemento de B .

Ejemplo XVI. $f = \{(0, a), (1, b)\}$ es una función desde $\{0, 1\}$ a $\{a, b, c\}$, mientras que $g = \{(0, a), (0, c), (1, b)\}$ no lo es.

A.2. FUNCIONES

Las funciones entre conjuntos finitos se pueden presentar en una tabla o gráficamente. En la Tabla A.1 vemos la representación en Tabla de f y g , mientras que en la Figura A.7 aparece la representación gráfica de las mismas.

x	$f(x)$	x	$g(x)$
0	a	0	a
1	b	0	c
		1	b

Tabla A.1: Representación en forma de tabla para los subconjuntos de $\{0, 1\} \times \{a, b, c\}$ del Ejemplo XVI. A la izquierda f que es una función y a la derecha g que no lo es.

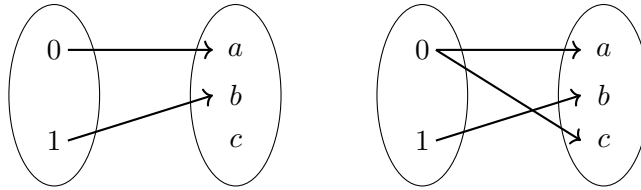
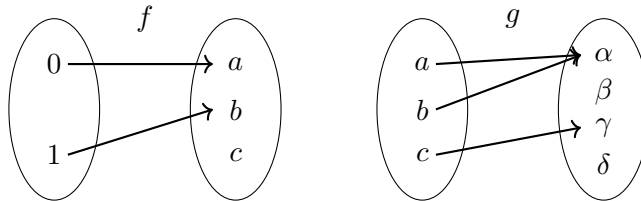


Figura A.7: Representación gráfica para los subconjuntos de $\{0, 1\} \times \{a, b, c\}$ del Ejemplo XVI. A la izquierda f que es una función y a la derecha g que no lo es.

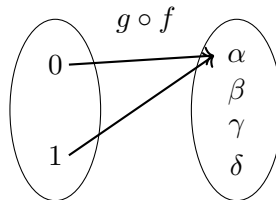
Definición 17 (Composición de funciones). Sean A, B, C conjuntos, una función $f : A \rightarrow B$ y una función $g : B \rightarrow C$. Se define la **composición** de f y g , denotada por $g \circ f$, como

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow C \\ (g \circ f)(a) &= g(f(a)). \end{aligned}$$

Para ver gráficamente la composición de dos funciones, consideremos f y g definidas en los siguientes diagramas:



La composición de f y g la encontramos en el siguiente diagrama:



Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Definición 18 (Función Inyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **inyectiva**, si

$$(\forall a, a' \in A) \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

En palabras, a elementos distintos de A , f asocia elementos distintos de B .

Definición 19 (Función Sobreyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **sobreyectiva**, si

$$(\forall b \in B) \quad (\exists a \in A) \quad f(a) = b.$$

En palabras, cada elemento de B está asociado al menos a un elemento de A .

Definición 20 (Función Biyectiva). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es **biyectiva**, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición 21 (Función Inversa). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si f es biyectiva, se define la función inversa de f , denotada por f^{-1} , por:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \rightarrow A \\ f^{-1}(b) = a &\Leftrightarrow f(a) = b. \end{aligned}$$

Ejemplo XVII. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ que aparecen en las siguientes tablas:

x	$f(x)$	x	$g(x)$
a	α	a	α
b	β	b	β
c	γ	c	γ
d	δ	d	δ
e	α	e	ϵ

La función f no es inyectiva porque $f(a) = f(e)$, y no es sobreyectiva porque ϵ no es asociado a ningún elemento de A . Por otro lado, la función g es biyectiva y por lo tanto podemos definir su inversa:

y	$g^{-1}(y)$
α	a
β	b
γ	c
δ	d
ϵ	e

Ejercicio III. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$. Muestre que f es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

A.2. FUNCIONES

Ejercicio IV. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ 2|z| + 1 & z < 0. \end{cases}$$

Muestre que f es biyectiva.

Ejercicio V. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(n, m) = n + m.$$

Muestre que f es sobreyectiva pero no inyectiva.

Proposición 22. Sean A, B y C conjuntos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ funciones. Entonces:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $(g \circ f)$ es sobreyectiva.
3. Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.
4. Si $(g \circ f)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
5. Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Demostración:

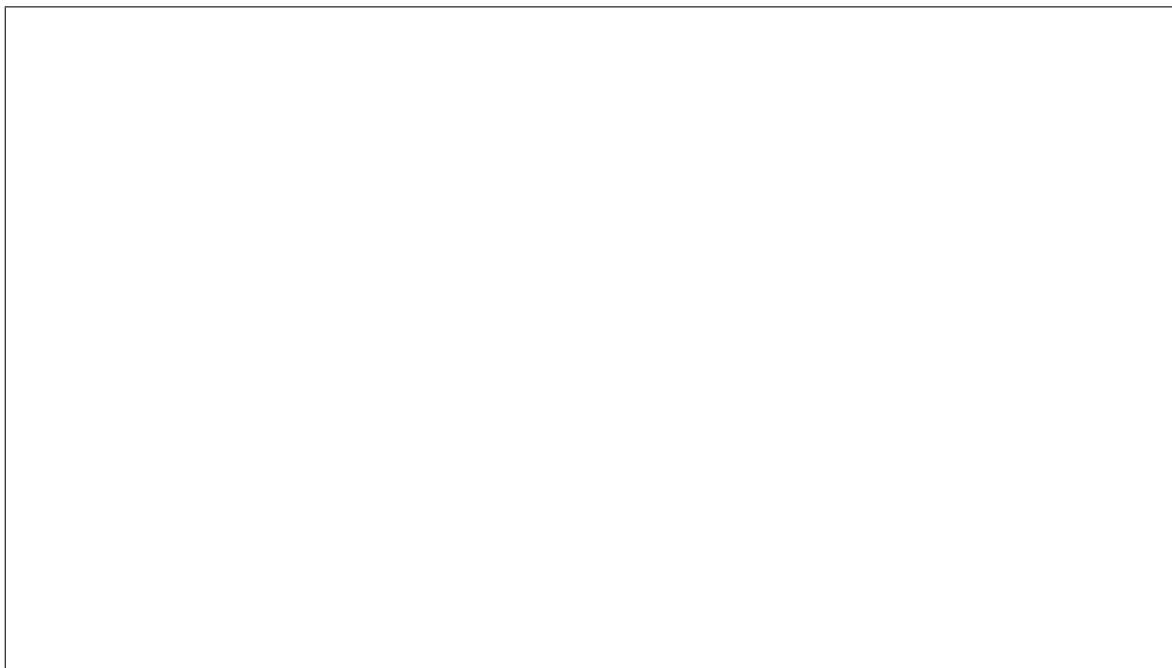


Imagen y Preimagen de un Conjunto

Definición 23 (Imagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $A' \subset A$, se define la imagen de A' a través de f por

$$f(A') := \{f(a) : a \in A'\}.$$

Notese que

$$b \in f(A') \Leftrightarrow (\exists a \in A') f(a) = b.$$

Definición 24 (Preimagen de un conjunto). Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Si $B' \subset B$, se define la preimagen de B' a través de f por

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

Notese que

$$a \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(a) \in B'.$$

A.2. FUNCIONES

Ejemplo XVIII. Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Considere la función $f : A \rightarrow B$ dada por:

x	$f(x)$
a	α
b	β
c	γ
d	δ
e	α

Entonces: $f(\{a, b, c\}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f(\{a, e\}) = \{\alpha\}$, $f^{-1}(\{\alpha, \beta\}) = \{a, b, e\}$ y $f^{-1}(\{\delta\}) = \{d\}$.

Ejercicio VI. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f(n, m) = n \cdot m.$$

Encuentre $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{10\})$, $f(\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = m\})$.

Proposición 25. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si A_1, A_2 son subconjuntos de A y $A_1 \subset A_2$, entonces:

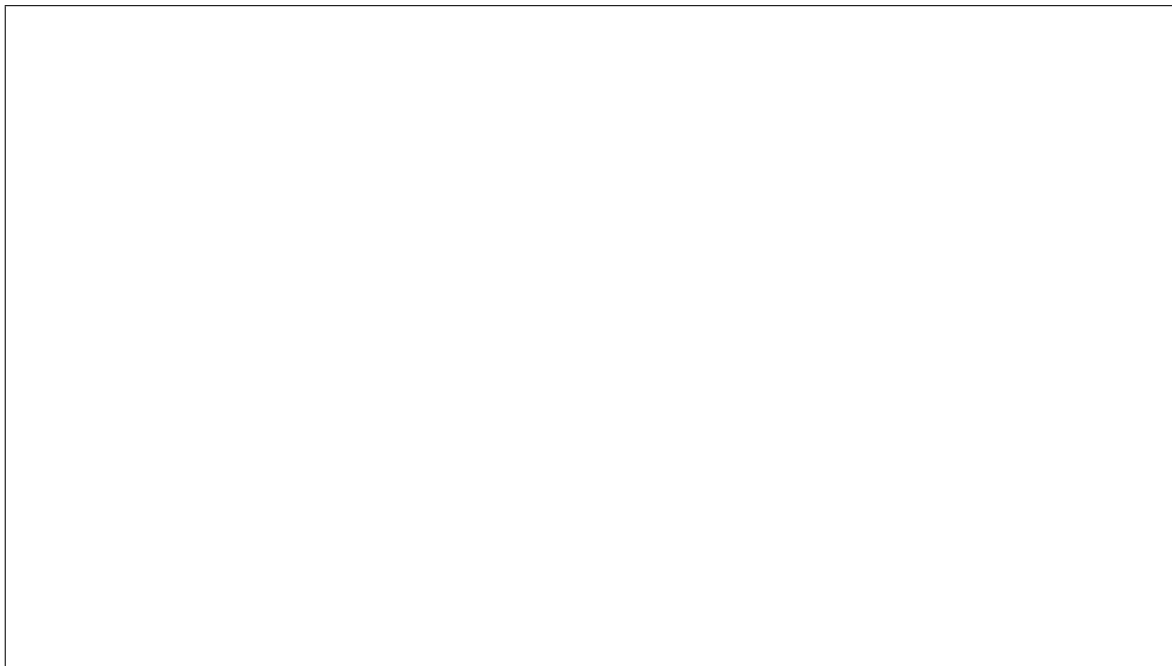
$$f(A_1) \subset f(A_2).$$

2. Si $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos de A , entonces:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f(A_i).$$

$$f\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_i).$$

Demostración:



Proposición 26. Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces:

1. Si B_1, B_2 son subconjuntos de B y $B_1 \subset B_2$, entonces:

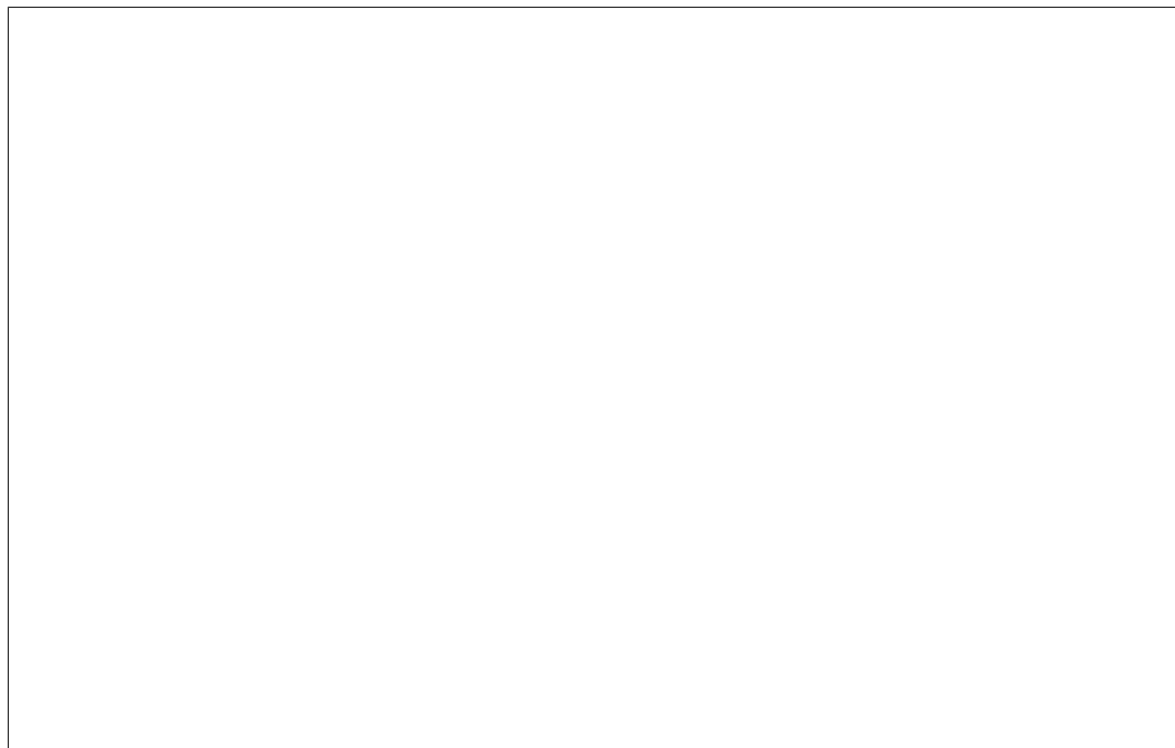
$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

2. Si $B_1, \dots, B_n$ son subconjuntos de B , entonces:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(B_i).$$

Demostración:



A.3. Ejercicios propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x + 1$. Calcule:

$$f([0, 1]), \quad f((0, \infty)), \quad f([-1/2, 2]).$$

$$f^{-1}([0, 1]), \quad f^{-1}((0, \infty)), \quad f^{-1}([-1/2, 2]), \quad f^{-1}(\{0\}).$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(2\pi x)$. Calcule:

$$f([0, 1]), \quad f(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(\{0\}).$$

3. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(m, n) = m/n$. Muestre que f es sobreyectiva, pero no inyectiva.

4. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ y sea $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(f) = f(0)$. Muestre que Φ es sobreyectiva, pero no inyectiva.

Apéndice B

Estructuras Algebraicas

En esta sección daremos una brevísima introducción a las estructuras algebraicas.

Definición 1 (Ley de composición interna). Sea A un conjunto no vacío. Llamaremos **ley de composición interna** en A a cualquier función $\diamond : A \times A \rightarrow A$. Al par $(A, \diamond)$ lo llamaremos *estructura algebraica*.

Ejemplo XIX. La suma y la multiplicación son leyes de composición interna en $\mathbb{R}$.

Ejemplo XX. Sea $A = \{a, b, c\}$ una ley de composición interna para A está dada por

$\diamond$	a	b	c
a	b	c	a
b	b	c	a
c	b	c	a

Definición 2 (Elemento Neutro). Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica. Diremos que $e \in A$ es un *elemento neutro* para $\diamond$, si para todo $a \in A$, se tiene $a \diamond e = e \diamond a = a$.

Ejemplo XXI. El 0 es neutro para la suma en $\mathbb{R}$, mientras que el 1 es neutro para la multiplicación en $\mathbb{R}$.

Proposición 3. Una estructura algebraica $(A, \diamond)$ tiene a lo más un elemento neutro.

Demostración:

Definición 4 (Elemento Inverso). Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica dotada de un elemento neutro e . Diremos que a tiene elemento inverso para $\diamond$, si existe $a' \in A$ tal que $a \diamond a' = a' \diamond a = e$.

Ejemplo XXII. El -2 es el inverso para la suma de 2 en $\mathbb{R}$, mientras que el $1/2$ es el inverso para la multiplicación de 2 en $\mathbb{R}$.

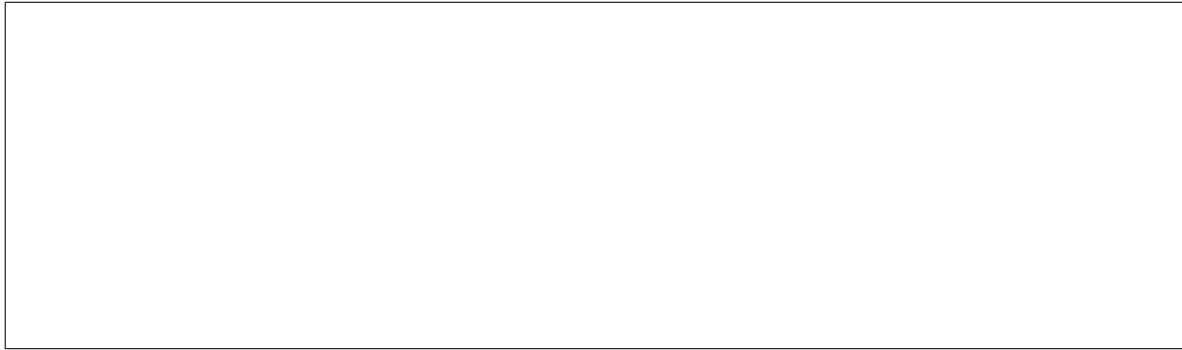
Definición 5 (Asociatividad). Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica. Diremos que $\diamond$ es **asociativa** en A si

$$(\forall a, b, c \in A) (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c).$$

Ejemplo XXIII. La suma y la multiplicación son asociativas en $\mathbb{R}$.

Proposición 6. Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica asociativa con neutro, entonces $a \in A$ tiene a lo más un inverso para $\diamond$, el que denotamos a^{-1} .

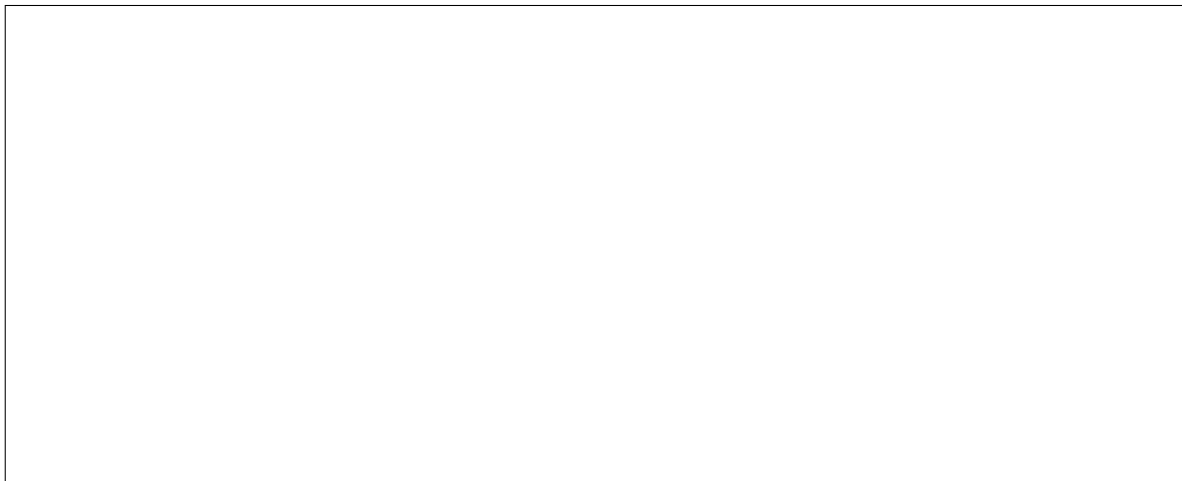
Demostración:



Proposición 7. Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica asociativa con neutro e , entonces:

1. Si $a \in A$ tiene inverso para $\diamond$, entonces a^{-1} también lo tiene. Además $(a^{-1})^{-1} = a$.
2. Si $a, b \in A$ tienen inverso para $\diamond$, entonces $a \diamond b$ también lo tiene y además $(a \diamond b)^{-1} = b^{-1} \diamond a^{-1}$.

Demostración:



Proposición 8. Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica asociativa con neutro e . Si $a \in A$ tiene inverso para $\diamond$, entonces para todo $b, c \in A$ se tiene:

$$a \diamond b = a \diamond c \Rightarrow b = c,$$

$$b \diamond a = c \diamond a \Rightarrow b = c.$$

Demostración:

Definición 9 (Conmutatividad). Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica diremos que $\diamond$ es **conmutativa** en A si

$$(\forall a, b \in A) a \diamond b = b \diamond a.$$

Ejemplo XXIV. La suma y la multiplicación son conmutativas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio I. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Muestre que la composición es una ley de composición interna en este conjunto que es asociativa, pero no conmutativa.

Solución:

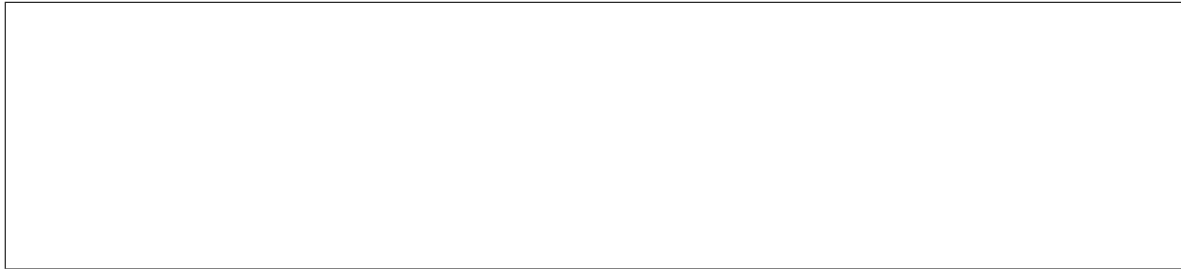
Definición 10 (Grupo). Sea $(A, \diamond)$ una estructura algebraica. Diremos que $(A, \diamond)$ es un grupo si:

1. $\diamond$ es asociativa.
2. Posee elemento neutro.
3. Todo elemento de A posee un inverso para $\diamond$.

Si además $\diamond$ es conmutativa, entonces $(A, \diamond)$ se dirá grupo Abeliano.

Ejemplo XXV. $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano, mientras que $(\mathbb{R}, \cdot)$ no es un grupo.

Ejercicio II. Sea $A = \{a\}$ y $\diamond$ cualquier ley de composición interna en A . Muestre que $(A, \diamond)$ es grupo Abeliano.



Tal como ocurre con los números reales, un conjunto puede estar dotado de más de una ley de composición interna, y en tal caso nos interesa la forma de interactuar que existe entre ellas.

Definición 11 (Distributividad). Sea A un conjunto no vacío dotado de dos leyes de composición interna: $\diamond$ y $*$. Diremos que $*$ **distribuye** con respecto a $\diamond$ si:

$$(\forall a, b, c \in A) (a \diamond b) * c = (a * c) \diamond (b * c).$$

$$(\forall a, b, c \in A) c * (a \diamond b) = (c * a) \diamond (c * b).$$

Ejemplo XXVI. En $\mathbb{R}$ la multiplicación distribuye con respecto a la adición.

Definición 12 (Anillo). Sea A un conjunto no vacío dotado de dos leyes de composición interna: $\diamond$ y $*$. Diremos que $(A, \diamond, *)$ es un anillo si:

1. $(A, \diamond)$ es grupo Abeliano.
2. $*$ es asociativa en A .
3. $*$ distribuye con respecto a $\diamond$.

Si $*$ posee un elemento neutro se dice que $(A, \diamond, *)$ es un anillo con unidad. Si $*$ es conmutativa se dice que $(A, \diamond, *)$ es un anillo conmutativo.

Ejemplo XXVII. 1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

3. El conjunto de polinomios dotado de su suma y multiplicación usuales es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 13 (Cuerpo). Sea A un conjunto no vacío dotado de dos leyes de composición interna: $\diamond$ y $*$. Diremos que $(A, \diamond, *)$ es un cuerpo si:

1. $(A, \diamond, *)$ es un anillo conmutativo con unidad.
2. Si $e \in A$ es el neutro para $\diamond$, entonces todo elemento de $A \setminus \{e\}$ tiene inverso para $*$.

Ejemplo XXVIII. 1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **no** es un cuerpo.

4. El conjunto de polinomios dotado de su suma y multiplicación usuales **no** es un cuerpo.

Ejercicio III. Sea $A = \{a\}$ y $\diamond, *$ dos leyes de composición interna en A . Muestre que $(A, \diamond, *)$ es un cuerpo.

Ejercicio IV. Muestre que $\mathbb{R}^2$ dotado de su suma estándar y el producto dado por $(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$ es un cuerpo. Identifique los neutros y una fórmula para los inversos.

B.1. Ejercicios Propuestos

1. Considere la estructura algebraica dada por las siguientes tablas y verifique que es un anillo, pero no un cuerpo.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

2. Considere la estructura algebraica dada por las siguientes tablas y complételas de modo que formen un cuerpo.

◇	a	b	c
a		b	
b	b	c	
c	c		b

*	a	b	c
a	a		
b		b	c
c		c	

kp...l